سلسلۂ مطبوعاتِ علمیۂ جامعۂ عثمانیہ

احصا کا ابتدائی رسالہ

حصۂ دوم

مع توضیحات از علم ہندسہ، علم حیل، و طبیعیات

مصنفۂ

جارج، اے گبسن ایم۔ اے۔ ایل۔ ایل ڈی۔ ایف آر ایس، ای

جس کا

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر کلیہ جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی نے اردو میں ترجمہ کیا

سنہ ۱۳۴۶ھ م سنہ ۱۳۳۷ف م سنہ ۱۹۲۸ء

از مطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے
جن کو حق اشاعت حاصل ہے اُردو میں
ترجمہ کرکے طبع و شایع کیگئی ہے۔

احصاء کے ابتدائی رسالہ مصنفۂ گبسن کا ترجمہ اردو میں حسب منظوری مجلس ریاضی و سائنس بی۔اے کی جماعتوں کے لئے کیا گیا ہے۔ مبتدیوں کے لئے انگریزی زبان میں یہ مفید کتاب ہے، احصاء کے اطلاق کے متعلق طبیعی، حیلی و ہندسی مسائل کی کثیر تعداد اس میں موجود ہے۔ ترجمہ تحت لفظی ہے کوئی ترمیم اصل پر نہیں کی گئی۔ کتاب کی ضخامت کی وجہ سے اس کو دو حصوں میں تقسیم کردیا گیا ہے، ورنہ مضمون بالکل مسلسل ہے، جہاں تکمل کی باضابطہ بحث شروع ہوتی ہے، وہاں سے حصۂ دوم کی ابتدا کی گئی ہے۔ اس کتاب میں تفرق اور تکمل میں کوئی خط فاصل نہیں پیدا کیا گیا اور نہ ہی ہونا چاہئے، ایک نقطہ نظر سے تکمل تفرق کا الٹ ہے، اس لئے جہاں معیاری ضابطے تفرق کے حاصل کئے جاتے ہیں وہاں تکمل کی معیاری صورتیں بھی پیدا ہوتی ہیں، ٹھیک اس موقع پر طالب علم کو ان دونوں اعمال سے تماس پیدا کرلینا چاہئے۔

مجوزہ ترقیم و اصطلاحات کی فہرست اس کتاب کے ساتھ منسلک ہے، احصائی علامات و رموز اساسی اہمیت رکھتی ہیں اور کثرت سے اعلیٰ ریاضی اور سائنس کے ہر شعبہ میں استعمال ہوتی ہیں، اس لئے ترقیم و علامات کا مناسب انتخاب اور انکے لحاظ سے پوری یکسانیت ریاضی اور سائنس کی تمام شاخوں میں ضروری ہے۔ اس کتاب کے مطبع میں جانے کے بعد سائنس ترقیم کمیٹی جامعہ عثمانیہ نے

انگریزی و یونانی حروف کے لئے مماثل عربی حروف اختیار کئے ہیں جن کے ساتھ مطابقت آیندہ سے سائنس کے تمام شعبوں میں لازمی ہوگی، اِن کی فہرست حوالہ کے طور پر یہاں دیجاتی ہے، براہ کرم اس کتاب کی تفصیلی ترقیم کو اِن حروف کی مطابقت سے پڑھا جائے۔

مترجم

مفرد حروف انگریزی و یونانی کے مماثل مجوزہ حروف ۔

A	B	C	D	E	F	G	H
ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ح
I	J	K	L	M	N	O	P
آ	ژ	ک	ل	م	ن	ط	پ
Q	R	S	T	U	V	W	X
ق	ر	س	ت	ء	و	ھ	لا
Y	Z						
یا	ے						

انگریزی کے بڑے (Capital) حروف بخط عربی لکھے جائینگے اور چھوٹے حروف بخط فارسی ۔ نیز بڑے حروف جلی لکھے جائیں گے اور ان کے لئے پیمانہ بھی بڑا ہوگا۔

a	b	c	d..........
ا	ب	ج	د......
A′	B′	C′	D′..........
اَ	بَ	جَ	دَ......
A_1	B_1	C_1	D_1..........
ا۱	ب۱	ج۱	د۱......

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ
عہ	بہ	جہ	ضہ	صہ	شہ	یہ	طہ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π
حہ	کہ	لہ	مہ	نہ	ظہ	بھ	π
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
ر، غہ	ثہ	ٹہ	چہ	فہ	خہ	پہ	سہ

یونانی بڑے حروف کے لئے آخر میں ھ کی بجائے ا لکھا جائے گا
جیسے عا، با، جا، ....

گذشتہ چند سالوں میں عملی سائنس کی تمام شاخوں میں بیحد ترقی ہوئی ہے۔ جس کی وجہ سے طالب علم کے اوقات پر بوجھ بہت بڑھ گیا ہے، اس لئے بعض لوگوں کا خیال ہے کہ ریاضی کتب نصاب کی نوعیت میں تبدیلی کی ضرورت ہے۔ اس لحاظ سے کئی کتب ریاضی شائع ہوئی ہیں جو طلبہ کی خاص خاص جماعتوں کے لئے موزوں کی گئی ہیں، ان میں صرف اتنی اور اس قسم کی ریاضی مندرج ہوتی ہے جو صرف ان طلبہ کی اغراض کو پورا کرے۔

اس تبدیلی کے حق میں جو دلائل اکثر بیان کئے جاتے ہیں اُن میں سے بعض کے ساتھ ہمیں دلی ہمدردی ہے۔ لیکن یہ ہمیشہ سے درست ہے اور آج بھی درست ہے کہ ریاضی سیکھنے کے لئے کوئی شاہ راہ نہیں ہے اور بغیر جانسوز کوشش کے اس علم کی کوئی مفید کار تحصیل نہیں ہو سکتی۔

بعض اوقات یہ کہا جاتا ہے کہ اگر طالب علم سادہ قوتوں، قوت نمائی اور لوکارثمی تفاعلوں اور شاید جیب اور جیب التمام کے مشتقوں اور تکملوں کے ساتھ پوری واقفیت رکھتا ہو تو فن انجنیری کے لئے علم احصائی اسقدر بنیاد کافی ہے۔ اس بیان میں سچائی کی بڑی مقدار موجود ہے، تاہم یاد رہے کہ اگر محض نتائج کے اقتباس اور استعمال کی حد سے زیادہ استعداد مطلوب ہو تو یہ ان چند اسباق سے حاصل نہیں ہو سکتی جو بالعموم ابتدائی اصولوں کی تشریح کے لئے کافی خیال کئے جاتے ہیں۔

یہ شائد ممکن ہے کہ چند سبقوں میں احصا کے خاص نتائج کی کافی مقدار بیان کر دیجا سکے اور اِن کی توضیح بھی کر دیجائے اور اِن کی مدد سے طالب علم حیلی اور طبیعی مسائل کی ابتدائی بحث کو ایک حد تک بخوبی سمجھ سکے، لیکن احصا کا اسقدر سطحی کورس اگرچہ فائدہ سے خالی نہیں مگر ہر دو مقدار اور نوعیت کے لحاظ سے یہ اِس قسم کے عملی مضامین کے برجستہ مطالعہ کے لئے مطلق کافی نہیں ہے جیسے تبادل برقی رو کا نظریہ، حرحرکیات، حرکت سیالات، لچک کا نظریہ وغیرہ وغیرہ اور جس طالب علم کی بنیاد محض مندرجہ بالا کورس پر رکھی گئی ہے اُس کے لئے طبیعیات اور کیمیا کے جدید معلومات اور مضامین تک رسائی محال ہوگی۔ علاوہ اس کے ہر دوراندیش تعلیمی اسکیم کا یہ مقصد ہونا چاہئے کہ طالب علم اپنے مذاق کے خاص فن میں بذاتِ خود تحقیق و تجسس کرنے کے قابل ہو جائے، جدید سائنس کے نہایت پیچیدہ مسائل اور اسقدر تفصیل جو اِس کے ساتھ مخصوص ہے اُن سب کی بناء پر یہ کچھ کم لازم نہیں آتا کہ ریاضی کی تعلیم میں بخل سے کام نہ لیا جائے۔ اِس امر کے مدنظر کہ طالب علم کو بالآخر کسی ایک خاص فن میں مہارت حاصل کرنا ہے یہ اور بھی ضروری معلوم ہوتا ہے کہ ابتدائی منزلوں میں اُس کی ریاضی کی تعلیم بالکل وہی ہو خواہ بعد میں وہ خالص ریاضی کی تحصیل میں اپنا پورا وقت لگانا چاہئے یا سائنس کی زیادہ عملی شاخوں میں۔ اور یہ خاص طور پر ضروری ہے کیونکہ تحلیل کے اعمال جو کسی حیلی، طبیعی یا کیمیاوی مظہر کے سنجیدہ مطالعہ میں شامل ہوتے ہیں وہ اُن اعمال کے ساتھ بہت کچھ لگاؤ اور اشتراک رکھتے ہیں جو احصا (کیلکولس) کی تعلیم میں منکشف ہوتے ہیں۔

ابتدا میں احصا پر جو کتابیں لکھی گئیں جیسے مکلارن اور سمسن کے رسالے وہ صرف خالص ریاضی دانوں کے لئے ہی تصنیف نہیں کی گئی تھیں، بلکہ اکثر اِن کی توضیحات طبیعی فلسفہ سے حاصل کی گئی تھیں، بعد میں شاید طبیعیات کی وسعت کے بڑھ جانے سے ایسی کتابوں میں احصا کا طبیعی استعمال کم ہوتا گیا اور احصا کی کتابیں ایک حد تک اعلیٰ ہندسہ کے رسالے بن گئے۔ علم ریاضی کی موجودہ صورتِ حال یہ ہے کہ احصا کی کتابوں کو نہ اعلیٰ ہندسہ کی کتب نصاب بن جانا چاہئے اور نہ ہی اُن کے لئے طبیعیات، انجینیرنگ یا کیمیا کی کتابیں بن جانا درست ہے۔

احصا کے ابتدائی رسالہ سے جو معقول امید کیجا سکتی ہے وہ یہ ہے کہ یہ طالب علم کو
احصا کے اصولوں اور اعمال کو آسانی کے ساتھ اپنے ایسے مطالبات میں لگانیکے
لئے تیار کرے جن میں احصا عام طور پر استعمال ہوتا ہے۔ اس غرض کو پورا کرنیکے
لئے احصا کے مضمون کی توضیح علوم ہندسہ، حیل اور طبعیات سے ہونی چاہئے
جبکہ ان فنون کی ذاتی اور خصوصی مشکلات کو خاص کتب نصاب میں تفصیلی بحث
کے لئے جگہ دیجائے اور یہ توضیحات اپنا اصل مقصد صرف عام اصولوں پر روشنی
ڈالنے کا پورا کریں اور ذہنی مشکلات کو رفع کرنے کی بجائے انہیں اور پیدا نہ کردیں۔
علم کیمیا کے متعلق یہ کہا جاسکتا ہے کہ احصا کے پختہ علم کی اس میں خاص ضرورت
ہے کیونکہ کیمیائی تحقیقات میں ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے خواص
زیادہ تر استعمال ہوتے ہیں۔
حال میں (Van Laar) کی کتاب [Leherbuch der Mathematischen
Chemie] اس قسم کی تصنیفات کا بیش خیمہ ہے جن سے قطع نظر نہیں ہوسکتی۔
اس میں مذکورہ بالا مقاصد کو حاصل کرنے کی کوشش کی گئی ہے، طالب علم کی
ریاضی قابلیت کے متعلق صرف اتنا فرض کرلیا گیا ہے کہ وہ اس کتاب کے مطالعہ
سے پیشتر ہندسہ کے ان مقالوں سے واقف ہے جو اکثر پڑھے جاتے ہیں۔ نیز اسکی
استعداد جبر و مقابلہ میں مسئلہ ثنائی تک ہے اور مستوی علم مثلث میں مسئلہ جمع تک۔
ملتف (خیالی) اعداد کو اس کتاب میں استعمال نہیں کیا گیا اور نہ ہی لاتناہی سلسلو
کے علم کو پہلے سے تسلیم کرلیا گیا ہے۔ جدید ریاضی کی باریکیوں کو دیدہ دانستہ جگہ نہیں
دی گئی کیونکہ نہ تو وہ مبتدی کے لئے مفید ہیں اور نہ ہی اس کی سمجھ میں آسکتی ہیں۔
ہندسی تخیلات کیطرف متواتر توجہ دلائی گئی ہے اور ساتھ ہی فن کی طبعی پیدائش
کو پیش نظر رکھا گیا ہے۔
شروع کے ابواب میں بہت سا سواد ہے جو نفس مضمون سے تعلق نہیں رکھتا
لیکن ترسیموں اور اکائیوں کا نظریہ اسقدر اہمیت رکھتا ہے اور اسقدر نامکمل طور پر
پیش کیا جاتا ہے کہ اس کا تذکرہ اس کتاب میں ضروری خیال کیا گیا۔ ہندسہ تحلیلی کے
اصولوں کو جہاں تک وہ احصا کے استعمال اور اس کے بنیادی اصولوں کی

تشریح کے لئے حقیقی طور پر کارآمد ہو سکتے ہیں میں نے بہت تامل کے ساتھ اس کتاب کے متن میں شریک کیا۔ ہندسہ میں احصا کے کثیر استعمال سے اگر قطع نظر کی جائے تو احصا کی تعلیم میں محددوں کے ہندسہ کے وسیع علم کی چنداں ضرورت نہیں معلوم ہوتی۔ مجھے امید ہے کہ اس ہندسہ کے ابتدائی اصولوں کی کافی تشریح کردی گئی ہے جو بہت سے طلبہ کی عملی ضروریات کو پورا کرے گی، اعلیٰ مستوی منحنیات اور سطحوں کے نظریہ کی بحث کو میں نے اس کتاب میں جگہ نہیں دی کیونکہ میری رائے میں یہ بحث ابتدائی رسالہ کے موزوں نہیں۔

دوسری جدت اس کتاب میں مساواتوں کے نظریہ کا باب ہے، اس جدت کی صرف اس لئے ضرورت نہیں محسوس ہوئی کہ اس سے احصا کی علم حساب سے توضیح ہوتی ہے بلکہ اس لئے بھی کہ عملی نقطہ نظر سے یہ مضمون بڑی اہمیت رکھتا ہے اور ماورائی مساواتوں کی بحث پر بہت کم ابتدائی کتابیں موجود ہیں۔

مضمون کی اس عام ترتیب اور ارتقا کو میں نے کئی سالوں سے اپنی جماعتوں کی تدریس میں استعمال کیا ہے، شرح اور انتہا کے تخیلات کی بحث قدرے طولانی ہے لیکن حیلی یا طبیعی سوالات میں احصا کے استعمال کی خاص مشکلات کا مقابلہ کرنے کے لئے تجربہ کی بنا پر میں نے اس طرز عمل کو نہایت سودمند پایا ہے، اگر یہ تخیلات پورے طور پر سمجھ میں آجائیں تو بعد کی ترقی زیادہ سریع اور یقینی ہوتی ہے۔ تفرق اور تکمل کے درمیان کوئی خاص خط فاصل نہیں کھینچا گیا اور تکمل کے کئی ضروری نتائج اس شاخ کا تفصیلی مطالعہ شروع کرنے سے پہلے حاصل کئے گئے ہیں۔ دسویں باب میں رقبوں اور مشتق و تکملی منحنیات کی جو بحث درج کی گئی ہے اس سے محدود تکملہ کی ہندسی تعریف کے لئے ایک حد تک تسلی بخش بنیاد پیدا کرنا ہی مقصود نہیں ہے بلکہ ترسیمی تکمل کے ایک طریقہ کی توضیح کرنا بھی ہے جو انجنیروں کے لئے اہمیت رکھتا ہے اور خالص نظری بحث میں بھی فائدہ سے خالی نہیں۔

حال کی نتب نصاب کی طرح ٹیلر کے مسئلہ کی بحث بہت بعد میں لائی گئی ہے، ابتدائی منزلوں میں اوسط قیمت کا مسئلہ کافی ہے۔ سلسلوں کے استدقاق اور تسلسل کے متعلق ایک حد تک بسیط مسائل اس کتاب کے آخر کی طرف بحث میں

لائے گئے ہیں۔ تاہم مضمون کی بحث ایسی ہے کہ جو اساتذہ معمولی ترتیب کو زیادہ پسند کریں وہ فوراً مسئلہ اوسط قیمت سے لامتناہی سلسلوں اور ٹیلر کے مسئلہ [ابواب پنجم و ششم حصۂ دوم] کا مطالعہ کرسکتے ہیں۔

ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعل اس قدر تفصیل سے بحث میں نہیں لائے گئے جیسے ایک متغیر کے تفاعل۔ تاہم ان کے نظریہ کے وہ حصے منتخب کرکے پیش کرنے کی کوشش کی گئی ہے جو طبیعی عملیات میں خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ کتاب کے آخیر میں ایک چھوٹا سا باب معمولی تفرقی مساواتوں پر ہے جن سے مساواتوں کے ایسے نمونوں کی توضیح ہوتی ہے جو اکثر علم حرکت، طبیعیات، حیلی اور برقی انجنیرنگ میں پائے جاتے ہیں۔

اکثر حصوں کے ساتھ سادہ مشقیں درج ہیں، مثالوں کے ان مستند مجموعوں میں کئی مسئلے اور نتائج ایسے ملینگے جن کے لئے کتاب کے متن میں جگہ نہیں مل سکتی تھی لیکن اہمیت کے لحاظ سے ان کا بالتصریح بیان کیا جانا ضروری تھا۔ طالب علم کی حوصلہ افزائی کے لئے کہ وہ اپنے تئیں اس مشق و محنت میں ڈالے جو احصا کے استعمال میں سہولت و اعتماد حاصل کرنے کے لئے قطعی طور پر لازمی ہے میں نے زیادہ ضروری امثلہ کے حل کے متعلق بلاتکلف اشارے درج کئے ہیں۔

اس کتاب کی تیاری میں کئی رسالوں کے مطالعہ کرنے کا موقع ہوا اور جہاں کہیں جان بوجھکر کوئی طرز تشریح اختیار کی گئی ہے جو کسی خاص مصنف کے ساتھ مخصوص ہے اس کا احتیاط سے مناسب اعتراف کردیا گیا ہے، لیکن جب کوئی شخص سالہا سال سے ایک مضمون پڑھا رہا ہو اس کے لئے اپنے علم کے تمام ماخذوں کا شناخت کرلینا دشوار ہے، پس ممکن ہے کہ میں نے زیادہ وسیع طور پر اقتباس کیا ہو جس کا مجھے علم نہ ہو۔ . . . .

. . . .

. . . .

جارج، اے، گبسن
گلاسکو ستمبر سنہ ۱۹۰۱ء

دوسرے ایڈیشن کا دیباچہ

اس ایڈیشن کے لئے کوئی خاص تبدیلیاں پہلے ایڈیشن پر نہیں کی گئیں، تاہم اس میں دو بابوں کا اس غرض سے اضافہ کر دیا گیا ہے کہ یہ کتاب، ریاضی طبعیات کے طلبہ کے لئے زیادہ مفید بن جائے۔ علامت تکمل کے اندر اعمال کی بحث میں مین نے (M Charles J. de la Vallée Poussin) کا طریقہ اختیار کیا ہے جو اس نے اپنے مکتوب (Etude des intergrals a limites infinies) میں درج کیا ہے، میری رائے میں اس طریقہ کے اندر سادگی اور صحت نمایاں حد تک موجود ہیں۔ یہ امید کیجاتی ہے کہ فوریر کے سلسلوں کا باب اس مضمون کے لئے کافی تمہید ثابت ہوگا لیکن اس امر کی کافی زور سے سفارش نہیں کیجا سکتی کہ طالب علم خود ان دلچسپ صفحات کا مطالعہ کرے اور ان پر پورا عبور حاصل کرے جن میں خود فوریر کسی اختیاری تفاعل کو موسیقی سلسلوں سے تعبیر کرنیکے عمل کو تکمیل تک پہنچاتا ہے۔

جارج، اے، گبسن

گلاسگو نومبر ۱۹۰۵ء

پہلے مطالعہ کیلئے ہدایات

مبتدی احصا کے مطالعہ میں ذیل کی ترتیب اختیار کر سکتے ہیں۔
باب اول تا چہارم۔ پنجم دفعات ۴۴ تا ۴۷، ششم، ہفتم دفعہ ۶۷ (مشق ۱۴ سوالات ۱ تا ۴ اور ۱۱ تا ۱۴)، نہم دفعات ۷۴ تا ۷۶، (مشق ۱۶ ا، ۱۶ ب) دفعہ ۷۸ مشق ۱۷، سوالات ۱ تا ۶) اس کورس میں جبریہ تفاعلوں کے اساسی خواص معہ اِن کے دلچسپ استعمال کے شامل ہیں۔

باب پنجم دفعات ۴۸ - ۵۰، ہفتم، ہشتم اور باقی حصہ باب نہم، دہم اور باب اول تا سوم، حصہ دوم۔

ابواب ۱ تا ۱۰ پر پورا ملکہ حاصل کر لینے کے بعد ابواب یازدہم، دوازدہم باب چہارم تا ہفتم حصہ دوم کا مطالعہ کیا جائے جیسے ضرورت محسوس ہو۔ جب تکمل کے اعمال میں کچھ استعداد حاصل ہو جائے تو اِس کے بعد فوراً آٹھواں باب، حصہ دوم شروع کر دیا جا سکتا ہے۔

فہرست مضامین

حصۂ دوم

باب نہم

محدود تکملے - علامت تکمل کے اندر اعمال

باب دہم

فوریر کے سلسلے

احصا کا ابتدائی رسالہ

حصۂ دوم

باب اول

تکمل

۱۔ تکمل۔ دفعہ ۸۲ حصۂ اول میں تکملی احصا کا اساسی مسئلہ بیان کیا گیا ہے اور وہ یہ ہے "ایک مسلسل تفاعل فا (لا) معلوم ہے ایک ایسا تفاعل معلوم کرنا مقصود ہے (۱) جس کا مشتق فا (لا) ہو اور (۲) جو ایک معلومہ قیمت ب اختیار کرے جبکہ لا کو قیمت ل دیجائے۔"

اگر صرف پہلی شرط کی قید ہو تو اس سوال کے بیشمار حل ہونگے لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ سب حل ایکدوسرے سے صرف بلحاظ ایک مستقل مقدار کے مختلف ہوں گے۔ ایسے کسی ایک حل کو ہم فا (لا) کا نامحدود تکملہ یا تکملی کہینگے اور مذکورہ مستقل تکمل کا مستقل کہلائیگا۔ اس مستقل کو بعض اوقات اختیاری مستقل بھی کہا جائیگا کیونکہ اس کو جو قیمت ہم چاہیں دیسکتے ہیں۔ اگر ف (لا) کوئی ایک تکملہ ہو تو ف (لا) + ج کو ہم عام تکملہ کہینگے جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

مقلوب تفاعلوں کی ترقیم عف‎$^{-1}$‎ فا (لا) کی بجائے فا (لا) کے نامحدود تکملہ کو بالعموم علامت

ب∫ا فا (لا) فرلا .... (۱)

سے تعبیر کیا جائیگا اور اسے ہم پڑھینگے "فا (لا) کا تکملہ یا تکملی بلحاظ لا کے" یا مختصراً فا (لا) فرلا کا تکملہ۔ تفرقی فرلا تکمل کے متغیر یعنی لا کو ظاہر کرتا ہے اور پوری مشترک علامت ∫ ..... فرلا سے مراد ہے "..... کا تکملہ بلحاظ لا کے"۔ فا (لا) کو متکمل کہا جائیگا۔

دفعہ ۸۲ حصۂ اول میں جو کچھ [عفَ فا (لا)]ا^ب سے تعبیر کیا گیا تھا وہ اب

ا∫^ب فا (لا) فرلا .... (۲)

سے تعبیر ہوگا اور موخر الذکر کو اس طرح پڑھا جائیگا "فا (لا) فرلا کا تکملہ ا سے ب تک"۔ جو تفاعل علامت ا∫^ب فا (لا) فرلا سے تعبیر ہوتا ہے اسے ہم محدود تکملہ کہینگے اور ا، ب تکملہ کی حدود کہلائینگی، انچلی حد ہے ا اور ب اوپری۔ واضح ہو کہ یہاں حد سے صرف مراد ہے متغیر کی وہ قیمت جو وقفہ کے ایک سرے پر ہو یعنی سرے پر کی قیمت۔ حد کے کسی اور اصطلاحی مفہوم سے اسے تمیز کیا جائے۔ ہندسی نقطۂ نظر سے علامت (۲) اس رقبہ کو بلحاظ علامت اور مقدار کے تعبیر کرتی ہے جو فا (لا) کی ترسیم کا معین نچلی حد ا سے اوپری حد ب تک جانے میں عبور کرتا ہے۔ اگر ف (لا)، فا (لا) کا ایک نامحدود تکملہ ہو تو حسب دفعہ ۸۲ حصۂ اول

ا∫^ب فا (لا) فرلا = [عفَ فا (لا)]ا^ب = ف (ب) ۔ ف (ا) .... (۳)

اگر ہم چاہیں تو ف (لا) کی بجائے عام تکملہ ف (لا) + ج استعمال کر سکتے ہیں مگر حاصل نتیجہ دونوں صورتوں میں وہی ہوگا کیونکہ عمل تفریق میں مستقل ج غائب ہو جائیگا ہندسی مفہوم کی بناء پر یا (۳) سے ظاہر ہے کہ

ب∫^ا فا (لا) فرلا = ۔ ا∫^ب فا (لا) فرلا = ف (ا) ۔ ف (ب) .... (۴)

یعنی حدود ا، ب کا باہم تبادلہ ہو سکتا ہے اگر ہم تکملہ کی علامت بدل دیں۔

نیز ہندسی مفہوم سے بالکل ف (ب) - ف (ا) سے ظاہر ہے کہ محدود تکملہ صرف اپنی حدود کا تفاعل ہے اور متغیر کا تفاعل نہیں ہے۔ پس مج فا (ع) فرع کی بالکل وہی قیمت ہے جو مج فا (لا) فرلا کی۔

شرح کے نقطۂ خیال سے اگر دیکھا جائے تو فا (لا) مشتق ہے ف (لا) کا اس لئے یہ اُس شرح کا اندازہ کرتا ہے جس کے موافق کہ ف (لا) بلحاظ لا کے بڑھتا ہے۔ پس اگر لا، ا سے ب تک بڑھے تو ف (لا) کا کل اضافہ خواہ یہ مثبت ہو یا منفی، ف (ب) - ف (ا) کے مساوی ہوتا ہے۔ اسلئے معلوم ہوا کہ محدود تکملہ (۳) وجہ یا دلیل کے اضافے (ب - ا) کے جواب میں ف (لا) کے کل اضافے کا ناپ ہے جبکہ تفاعل کی شرح تغیر فا (لا) معلوم ہو۔

جس تفاعل کا مشتق فا (لا) ہے اور جو ا کے مساوی ہوتا ہے جبکہ لا، ا کے مساوی ہو وہ ہے (دفعہ ۸۲، حصۂ اول)

عف^ا فا (لا) - [عف^ا فا (لا)]ا + ا

اور موجودہ ترقیم کے موافق یہ ہے

مج^لا فا (لا) فرلا + ا یا مج^لا فا (ع) فرع + ا ...... (۵)

یہاں اوپر کی حد لا، وجہ کی وہ خاص قیمت ہے جس کے لئے تفاعل محسوب کیا گیا ہے دفعہ ۸۲ حصۂ اول کی ہندسی تعبیر میں اوپر کی حد لا نقطہ ن کا فصلہ و م ہے، شرح کے نقطہ نظر سے علامت (۵) اُس تفاعل کو تعبیر کرتی ہے جو شرح فا (لا) کے حساب سے بدلتا ہے اور جو ا کے مساوی ہوتا ہے جبکہ لا، ا کے مساوی ہو۔

محدود تکملوں کا مضمون اگلے باب میں زیادہ تفصیل سے بحث میں آئیگا تاہم جو کچھ اس کے متعلق اس دفعہ میں یا باب دہم حصۂ اول میں دیا گیا ہے وہ اس امر کے لئے کافی ہے کہ طالب علم رقبوں وغیرہ کے آسان سوالات کو جو اس باب کے آخر میں مشق کے طور پر دئے گئے ہیں باسانی حل کر سکے۔

۴۔ معیاری صورتیں۔ جہاں تک موجودہ بحث کا تعلق ہے تکمل محض عمل تفرق کا الٹ ہے اور کسی تکملہ کو محسوب کرنے کے لئے خواہ یہ محدود ہو یا نامحدود یہ ضروری ہے کہ معلومہ تکملوں کی ایک جدول پہلے سے مرتب کرلی جائے۔ یہ جدول تفرق کے معلومہ نتائج سے جو ہم پہلے حاصل کرچکے ہیں مرتب ہوسکیگی۔ اس لئے سب سے پہلے ہم معیاری صورتوں کی جدول تیار کرینگے اس کے بعد ان تکملوں کو جو جدول میں موجود نہ ہوں ایسی صورتوں میں تحویل کرنے کے طریقے بیان کرینگے جن کے تکملے معیاری صورتوں کی مدد سے معلوم ہوسکیں۔ نامحدود تکملوں کی تمام صورتوں میں اس جانچ کو عمل میں لانا چاہیئے کہ تکملہ کا مشتق لازماً مساوی ہو متکمل کے۔

یا علامات میں ف(لا) = ∫ فا(لا) فرلا اگر فرف(لا) / فرلا = فا(لا)

پس تکملہ کی تعریف یا تعیین کے لئے حسب ذیل مساوات ہے۔

فر / فرلا [∫ فا(لا) فرلا] = فا(لا)

یعنی اعمال فر / فرلا اور ∫ .... فرلا ایک دوسرے کے الٹ ہیں

تفرقوں کے مفہوم کے لحاظ سے فا(لا) فرلا تفرقہ ہے ف(لا) کا جبکہ ف(لا) تکملہ ہو فا(لا) کا۔ ف(لا) کو اکثر اوقات تفرقہ فا(لا) فرلا کا تکملہ کہا جاتا ہے۔ چونکہ

فا(لا) فرلا = فرف(لا) = فر[∫ فا(لا) فرلا]

پس اعمال فر اور ∫ ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

جدول ذیل میں اساسی معیاری صورتیں دی گئی ہیں باقی مشہور صورتیں بعد میں دی جائینگی۔ بعض معیاری صورتوں کو دو شکلوں میں دکھایا گیا ہے۔ دلیل اکثر اوقات بنیادی شکل ا لا + ب میں واقع ہوتی ہے اس لئے طالب علم کو ابتدا سے ہی انکے متناظر تکملے سے مانوس ہو جانا چاہیئے۔ ان سب نتائج کی جانچ عمل تفرق سے کرلینی چاہیئے۔

(۱) اگر $\text{ن} \neq -1$ تو

$$\int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \quad ، \quad \int (\text{الا}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{فرلا} = \frac{(\text{الا}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1)\text{ا}}$$

(۲) اگر $\text{ن} = -1$ تو

$$\int \frac{1}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\ \text{لا} \quad ، \quad \int \frac{1}{\text{الا}+\text{ب}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{لوک}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۳)
$$\int \text{ق}^{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{ق}^{\text{لا}} \quad ، \quad \int \text{ق}^{\text{الا}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{ق}^{\text{الا}}$$

(۴)
$$\int \text{جب}\ \text{لا}\ \text{فرلا} = -\text{جم}\ \text{لا} \quad ، \quad \int \text{جب}\,(\text{الا}+\text{ب})\,\text{فرلا} = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{جم}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۵)
$$\int \text{جم}\ \text{لا}\ \text{فرلا} = \text{جب}\ \text{لا} \quad ، \quad \int \text{جم}\,(\text{الا}+\text{ب})\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{جب}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۶)
$$\int \text{قط}^2\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \text{مس}\ \text{لا} \quad ، \quad \int \text{قط}^2(\text{الا}+\text{ب})\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۷)
$$\int \text{قم}^2\,\text{لا}\ \text{فرلا} = -\text{مم}\ \text{لا} \quad ، \quad \int \text{قم}^2(\text{الا}+\text{ب})\,\text{فرلا} = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{مم}\,(\text{الا}+\text{ب})$$

(۸)
$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \text{جب}^{-1}\,\text{لا} \quad ، \quad \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} = \text{جب}^{-1}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

$$\text{یا} = -\text{جم}^{-1}\,\text{لا} \qquad \text{یا} = -\text{جم}^{-1}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

(۹)
$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 \pm 1}} = \text{لوک}\,(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2 \pm 1}) \quad ، \quad \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 \pm \text{ا}^2}} = \text{لوک}\,(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2 \pm \text{ا}^2})$$

(۱۰)
$$\int \frac{\text{فرلا}}{1+\text{لا}^2} = \text{مس}^{-1}\,\text{لا} \quad ، \quad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^2+\text{لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-1}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

$$\text{یا} = -\text{مم}^{-1}\,\text{لا} \qquad \text{یا} = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{مم}^{-1}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

(۱۱)
$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2-\text{ا}^2} = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}\left(\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}}\right) \quad \text{اگر}\ \text{لا}^2 > \text{ا}^2$$ (دفعہ ۳، مثال ۲)

$= \frac{1}{2\text{ا}}$ لوک $\left(\frac{\text{ا} - \text{لا}}{\text{ا} + \text{لا}}\right)$ اگر $\text{لا}^2 < \text{ا}^2$

چونکہ جب$^{-1}$ لا - (- جم$^{-1}$ لا) $= \frac{\pi}{2}$ اسلئے جب$^{-1}$ لا اور - جم$^{-1}$ لا دونوں

$\frac{1}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}}$ کے تکملے ہیں، اسی طرح کے مشاہدات $\frac{1}{1 + \text{لا}^2}$ کے تکملہ کے لئے

بھی درست ہیں۔ نامحدود تکملہ اکثر اوقات مختلف شکلوں میں بیان کیا جاسکتا ہے، لیکن ان صورتوں میں سے کوئی دو ایک دوسرے سے صرف بلحاظ ایک مستقل کے مختلف ہونگی۔ مقلوب مثلثی تفاعلوں پر تکملی اعمال احتیاط سے کئے جائیں کیونکہ یہ کثیر القیمت تفاعل ہیں، بالخصوص زاویہ کی حدود کے متعلق جو قیود (دفعہ ۲۸، ۴۶ حصہ اول) ہیں انکو ہمیشہ پیش نظر رکھا جائے۔

اگر لا منفی ہو تو $\frac{1}{\text{لا}}$ کا تکملہ لوک لا نہیں ہے بلکہ لوک (- لا) ہے اور اگر لا، ا سے کم ہو تو $\frac{1}{\text{لا} - \text{ا}}$ کا تکملہ لوک (ا - لا) ہوگا۔ صورت ۱۱ صورت ۱۰ کے ساتھ مقابلہ کی غرض سے درج کی گئی ہے، اسی غرض سے صورتیں ۸ اور ۹ ایک ساتھ جمع کیگئی ہیں۔

اگر لا منفی ہو تو اس کی تصدیق کی جائے کہ $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}}$ کا تکملہ

- لوک $\left\{- \text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ک}}\right\}$ ہے۔

صورت ۹ میں لوکارتموں کی بجائے مقلوب زائدی تفاعل استعمال ہو سکتے ہیں (دفعہ ۶۶، حصہ اول)

(۹) $\text{ا} - \int \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}} =$ جبز$^{-1}$ $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$، $\int \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}} =$ جمز$^{-1}$ $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$

اور یاد رہے کہ جمز$^{-1}$ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ دو قیمتوں والا تفاعل ہے۔ صورتیں مستز$^{-1}$ لا، ممز$^{-1}$ لا ایسی ضروری نہیں۔

مشق ۱۔ ذیل کے تفاعلوں کو بلحاظ لا کے تکمل کرو

√لا ، ۱/√لا ، √(۳ لا − ۴) ، ۱/√(۳ لا − ۴) ، ۱/√(۳ − لا^۲)

مشق ۲۔ ذیل میں جو تکملے مندرج ہیں اُن کی قیمتیں معلوم کرو

∫ (از ۰ تا π/۲) جب لا فرلا ، ∫ (از ۰ تا π/۲) جم لا فرلا ، ∫ (از ۰ تا π/۴) فرلا / جم^۲ لا ، ∫ (از ا تا ب^۲) فرلا / √لا ، ∫ (از ا تا ۳) فرلا / لا

۳۔ جبریہ اور مثلثی تحویلیں

تکملہ کی تعریف کی رو سے اور مسائل ۲، ۳ دفعہ ۸۵ حصہ اول کے استعمال کرنے سے ذیل کے مسئلے بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں

(۱) ∫ ج فا(لا) فرلا = ج ∫ فا(لا) فرلا جہاں ج مستقل ہے

(۲) ∫ (ع − و + ... + ی) فرلا = ∫ ع فرلا − ∫ و فرلا + ... + ∫ ی فرلا

جہاں ع، و ..... ی متغیر لا کے تفاعل ہیں یا مستقل ہیں۔

(۲) میں دائیں طرف کے تکملہ کا مشتق تعریف کی رو سے ع − و + ... + ی ہے اور مسئلہ ۳، دفعہ ۸۵ حصہ اول کی رو سے بائیں جانب کے مجموعہ کا مشتق رقموں کے مشتقوں کا مجموعہ ہے جو تکملہ کی تعریف کی رو سے ع − و + ... + ی ہے۔ پس اگر تکمل کے مستقلات سے قطع نظر کی جائے تو مساوات (۲) درست ہے۔

مثال ∫ (۳ لا^۴ − ۵ لا^۲ + ۱) فرلا = ∫ ۳ لا^۴ فرلا − ∫ ۵ لا^۲ فرلا + ∫ ۱ فرلا

(۲) کی رو سے

= ۳ ∫ لا^۴ فرلا − ۵ ∫ لا^۲ فرلا + ∫ فرلا　(۱) کی رو سے

= ۳/۵ لا^۵ − ۵/۳ لا^۳ + لا

تکمل درحقیقت آزمائشی عمل ہے، اور اکثر اوقات ایسا ہوتا ہے کہ معلومہ تفاعلوں میں سے کوئی ایسا تفاعل نہیں ملتا جس کا مشتق معلومہ متکمل ہو (دیکھو دفعہ ۸۲ حصہ اول)۔ دفعات ۴، ۹ میں تکمل کے دو عام طریقے دئے جائیں گے جو تکملوں کی

تلاش میں نہایت کارآمد ثابت ہوتے ہیں، لیکن یاد رہے کہ اکثر اوقات کسی سادہ سی جبریہ یا مثلثی تحویل کی مدد سے متکمل کو ایسی ارقام کے مجموعہ کی شکل میں لا سکنا ممکن ہوتا ہے کہ ہر ایک رقم معیاری صورت میں آجائے تکمل کے بعض نتائج اسقدر اہم ہیں کہ انہیں معیاری صورتوں میں شریک کر لینا مناسب ہے لیکن طالب علم کو چاہیئے کہ الگ الگ نتائج کو حفظ یا در رکھنے کی بجائے نفس تحویل کے اصل منشا کو ذہن نشین کرے۔ اب ہم ایسی تحویلوں کی چند مثالیں درج کرینگے۔

مثال ۱۔ $\dfrac{\text{۲لا}^{۳} - \text{۷لا}^{۲} + \text{۱}}{\text{۲لا} - \text{۱}}$ کو تکمل کرو۔

تقسیم سے $\dfrac{\text{۲لا}^{۳} - \text{۷لا}^{۲} + \text{۱}}{\text{۲لا} - \text{۱}} = \text{لا}^{۲} - \text{۳لا} - \dfrac{\text{۳}}{\text{۲}} - \dfrac{\text{۱}}{\text{۲}} \times \dfrac{\text{۱}}{\text{۲لا} - \text{۱}}$

تکملہ ہے $\dfrac{\text{لا}^{۳}}{\text{۳}} - \dfrac{\text{۳لا}^{۲}}{\text{۲}} - \dfrac{\text{۳}}{\text{۲}}\text{لا} - \dfrac{\text{۱}}{\text{۴}}\ \text{لوک}\ (\text{۲لا} - \text{۱})$

ہر ایک ایسی کسر کا تکمل جس میں شمار کنندہ لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہو اور نسب نما لا کا خطی تفاعل ہو اسی طرح عمل میں آسکتا ہے۔

مثال ۲۔ $\dfrac{\text{۱}}{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}}$ کو تکمل کرو۔

اسکو جزوی کسروں میں تحلیل کرو

$$\frac{\text{۱}}{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲ا}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{لا} - \text{ا}} - \frac{\text{۱}}{\text{لا} + \text{ا}}\right)$$

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲} - \text{ا}^{۲}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲ا}}\left\{\text{لوک}\ (\text{لا} - \text{ا}) - \text{لوک}\ (\text{لا} + \text{ا})\right\}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲ا}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{لا} + \text{ا}}$$

جبکہ $\text{لا}^{۲} > \text{ا}^{۲}$ کیونکہ صرف اسی صورت میں $\dfrac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{لا} + \text{ا}}$ مثبت ہوگا۔ اگر

$\text{لا}^{۲} < \text{ا}^{۲}$ تو تکملہ $\frac{۱}{۲\text{ا}}$ لوک $\frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{ا}+\text{لا}}$ ہوگا کیونکہ اس صورت میں $\frac{۱}{\text{ا}-\text{لا}}$ کا تکملہ لوک $(\text{ا}-\text{لا})$ ہے۔

یہ تحویل جزوی کسور کے طریقہ کی ایک خاص صورت ہے۔ اس کے تفصیلی مطالعہ کے لئے طالب علم جبر و مقابلہ کی کوئی مستند کتاب دیکھے۔

ملاحظہ ہو دفعہ ۱۱۔

چونکہ
$$\frac{۳\text{لا}-۵}{(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۲)} = \frac{۲}{\text{لا}-۱} + \frac{۱}{\text{لا}-۲}$$

اس لئے
$$\int \frac{(۳\text{لا}-۵)\,\text{فرلا}}{(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۲)} = ۲\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۱) + \text{لوک}\,(\text{لا}-۲)$$

مثال ۳۔ صورتیں $\frac{۱}{\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^{۲}}$ اور $\frac{۱}{\sqrt{\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^{۲}}}$

اگر ا اور ب دونوں مثبت ہوں تو

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^{۲}} = \frac{۱}{\text{ب}} \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{\text{ا}}{\text{ب}}+\text{لا}^{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{\text{اب}}}\,\text{مس}^{-۱}\left(\frac{\sqrt{\text{ب}}\,\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}}}\right)$$

اگر ا منفی اور ب مثبت ہو تو تکمل کو مثال ۲ کی شکل میں لانا چاہئے۔

مثلاً
$$\int \frac{\text{فرلا}}{۳\text{لا}^{۲}-۵} = \frac{۱}{۳} \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}-\frac{۵}{۳}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۱۵}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-\sqrt{\frac{۵}{۳}}}{\text{لا}+\sqrt{\frac{۵}{۳}}}$$

اسی طرح $\frac{۱}{\sqrt{\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^{۲}}}$ پر بھی عمل ہو سکتا ہے۔

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۳-۲\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\frac{۳}{۲}-\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{جب}^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۲}\,\text{لا}}{\sqrt{۳}}\right)$$

ذرا سی مشق کے بعد طالب علم بہت سے مدارج زبانی کر سکیگا، پہلی صورت میں پورا عمل یہ ہے

$$\frac{1}{\text{ب}}\int\frac{\text{فرلا}}{\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}+\text{لا}^2}=\frac{1}{\text{ب}}\times\frac{1}{\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}\,\text{سن}^{-1}\left(\frac{\text{لا}}{\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}\right)=\frac{1}{\text{ا ب}}\,\text{سن}^{-1}\frac{\text{لا ب}}{\text{ا}}$$

مثال ۴ - $\text{جب}^{\text{ن}}\text{لا}$ ، $\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}$ ، جب م لا جم ن لا

جس صورت میں ن چھوٹا مثبت صحیح عدد ہو تو $\text{جب}^{\text{ن}}\text{لا}$ ، $\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}$ بآسانی لا کے اضعاف کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں، ن کی اور قیمتوں کے لئے مسلسل تحویل (دفعہ ۹) یا دفعہ ۵ مثال ۴ کے طریقہ کو استعمال کرنا زیادہ مناسب ہوگا۔

$$\text{جب}^2\text{لا}=\tfrac{1}{2}(1-\text{جم ۲لا})\text{ ، }\text{جب}^3\text{لا}=\tfrac{3}{4}\text{جب لا}-\tfrac{1}{4}\text{جب ۳لا}$$

$$\int\text{جب}^2\text{لا فرلا}=\tfrac{1}{2}\text{لا}-\tfrac{1}{4}\text{جب ۲لا ، }\int\text{جب}^3\text{لا فرلا}$$

$$=-\tfrac{3}{4}\text{جم لا}+\tfrac{1}{12}\text{جم ۳لا}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{جب}^2\text{لا فرلا}=\frac{\pi}{4}\text{ ، }\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{جب}^3\text{لا فرلا}=-\left[-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{12}\right]=\tfrac{2}{3}$$

اسی طرح جم لا کی قوتوں پر بھی عمل ہو سکتا ہے۔

جیب اور جیب التمام کے حاصل ضرب کو یا دو جیوب یا دو جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع یا حاصل تفریق کی رقوم میں بیان کرکے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً

$$\text{جب م لا جم ن لا}=\tfrac{1}{2}\left\{\text{جب(م+ن)لا}+\text{جب(م-ن)لا}\right\}$$

اس لئے اگر م ≠ ن تو

$$\int\text{جب م لا جم ن لا فرلا}=-\frac{\text{جم(م+ن)لا}}{2(\text{م+ن})}-\frac{\text{جم(م-ن)لا}}{2(\text{م-ن})}$$

لیکن اگر م = ن تو تکملہ ہے

$$-\frac{1}{4\text{م}}\,\text{جم ۲م لا}$$

مشق ۱

امثلہ ۱ تا ۱۵ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو۔

۱— $\frac{\text{۳لا}^{۴} - \text{۴لا}^{۳} + \text{۲لا}^{۲} - ۳}{\text{لا} - ۳}$　　۲— $\frac{\text{۲لا} + ۱}{\text{۲لا} - ۱}$

۳— $\frac{\text{۲لا} - ۳}{\text{لا}^{۲} - \text{۳لا} + ۲}$　　۴— $\frac{\text{۳لا} - ۷}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا} - ۲)(\text{لا} - ۳)}$

۵— $\frac{۱}{۷ - \text{۳لا}^{۲}}$　　۶— $\frac{۱}{۷ + \text{۳لا}^{۲}}$

۷— $\frac{۱}{\sqrt{۳ - \text{۴لا}^{۲}}}$　　۸— $\frac{۱}{\sqrt{۳ + \text{۴لا}^{۲}}}$

۹— $\text{جم}^{۲}\,\text{لا}$　　۱۰— $\text{جم}^{۳}\,\text{لا}$　　۱۱— $\text{جم}^{۲}(\text{ا لا} + \text{ب})$

۱۲— $\text{جب}^{۴}\,\text{لا}$　　۱۳— جب ۳لا جب ۴لا

۱۴— $\text{جب}(\text{۳لا} + ۲)\,\text{جم}(\text{۴لا} + ۳)$　　۱۵— $\text{جم لا جم ۲لا جم ۳لا}$

۱۶ سے ۲۱ تک کے سوالوں میں جو تکملے ہیں اُن کی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۶— $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۲}\,\text{لا فرلا}$　　۱۷— $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۲}\,\text{۲لا فرلا}$

۱۸— $\int_{۰}^{۲} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲} + ۴}$　　۱۹— $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۴ - \text{لا}^{۲}}}$

۲۰— $\int_{۳}^{۴} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲} - ۴}$　　۲۱— $\int_{۰}^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۳ - \text{لا}^{۲}}}$

۲۲— اگر م، ن نامساوی مثبت صحیح عدد ہوں تو

$$\int_{۰}^{\pi} \text{جم م لا جم ن لا فرلا} = ۰ = \int_{۰}^{\pi} \text{جب م لا جب ن لا فرلا}$$

اور ہر تکملہ کی قیمت معلوم کرو جبکہ م اور ن مساوی مثبت صحیح عدد ہوں۔

۲۳ — تکملوں کی ترسیموں سے دکھاؤ کہ ذیل کی مساواتیں درست ہیں

(۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{ن}\text{لا}\,\text{فرلا} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{ن}\text{لا}\,\text{فرلا}$ جہاں ن مثبت ہے

(۲) $\int_{0}^{\pi} \text{جب}^{ن}\text{لا}\,\text{فرلا} = ۲\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{ن}\text{لا}\,\text{فرلا}$ جہاں ن مثبت ہے

(۳) $\int_{0}^{\pi} \text{جم}^{ن}\text{لا}\,\text{فرلا} = ۲\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{ن}\text{لا}\,\text{فرلا}$ اگر ن جفت صحیح عدد ہو

لیکن $= ۰$ اگر ن طاق صحیح عدد ہو

۲۴ — مکافی $\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ اور نقطہ (ب، ج) میں سے گذرنیوالے دوہرے معین کے درمیان جو رقبہ محدود ہے وہ $\frac{۴}{۳}$ ب ج کے مساوی ہے۔

۲۵ — ا، ب مثبت ہیں اور ا < ب، ثابت کرو کہ جو رقبہ زائد $\text{لا}\,\text{ما} = \text{ج}^{۲}$، محور لا اور ا، ب پر کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ $\text{ج}^{۲}$ لوک $\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)$ کے مساوی ہے۔ اگر زائد کی بجائے معلومہ منحنی $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{ن}}{\text{ج}^{ن-۱}}$ ہو تو رقبہ

$\left(\text{ب}^{ن+۱} - \text{ا}^{ن+۱}\right) / (ن+۱)\,\text{ج}^{ن-۱}$ ہوگا۔

۲۶ — ثابت کرو کہ جیبی منحنی $\text{ما} = \text{ب}\,\text{جب}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$ کے ایک محراب اور محور لا کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ ۲ ا ب کے مساوی ہے۔

۲۷ — ناقص اپنے محور اعظم کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ ایک پوری گردش سے جس کرہ نما کی تکوین ہوتی ہے اُس کا حجم $\frac{۴}{۳}\pi\,\text{ا}\,\text{ب}^{۲}$ ہے۔ اگر گردش کا محور محور اصغر ہو تو حجم $\frac{۴}{۳}\pi\,\text{ا}^{۲}\,\text{ب}$ ہوگا۔

۲۸ — بعض سطحوں کو اگر ایک ایسے نقطہ پر جس کا فصلہ لا ہے محور لا پر عموداً تراشا جائے تو تراش کا رقبہ $\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}^{۲}$ ہوتا ہے جہاں ا، ب، ج مستقل ہیں، ثابت کرو کہ دو مستوی سطحوں کے درمیان جو محور لا پر عمود وار ہیں ان سطحوں کا حجم

$\text{ا}(\text{ب}-\text{ا}) + \frac{۱}{۲}\,\text{ب}\,(\text{ب}^{۲}-\text{ا}^{۲}) + \frac{۱}{۳}\,\text{ج}\,(\text{ب}^{۳}-\text{ا}^{۳})$ منقطع ہوتا ہے۔

جہاں ا، ب اُن نقطوں کے فصلے ہیں جہاں مستویات محور لا کو کاٹتی ہیں (ا < ب)
اس نتیجہ کو ذیل کے حجم معلوم کرنے میں استعمال کرو۔
(۱) مخروط کا حجم (۲) قطعہ کرہ کا حجم (۳) ناقص نما کا حجم جس کی مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ى^2}{ج^2} = 1 \text{ ہے۔}$$

۲۹۔ مثال ۲۸ میں فرض کرو کہ ا، ب اور ان کے درمیانی نقطہ میں سے گذرنیوالی تراشوں کے رقبے بالترتیب $ص_1$، $ص_2$ اور م ہیں اور ب - ا = ۲ ھ ثابت کرو کہ حجم مذکور $\frac{1}{3}$ ھ ($ص_1$ + $ص_2$ + ۴ م) ہے۔

۴۔ متغیر کی تبدیلی۔ دفعہ ۵۹ حصہ اول میں تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنیکا کلیہ بتایا گیا ہے۔ اسی کلیہ سے تکمل کا ایک مشہور طریقہ حاصل ہوتا ہے، دفعہ گذشتہ میں جن دو عام طریقوں کا ذکر کیا گیا ہے ان میں سے یہ ایک ہے۔ اس کلیہ کی رو سے تکمل کے متغیر کو بدل کر تکمل عمل میں لاتے ہیں۔ سب سے پہلے سادہ سی مثال لو

$$ما = \int \frac{فر لا}{لا^2 + 2لا + 2} \text{ ، } \frac{فر ما}{فر لا} = \frac{1}{لا^2 + 2لا + 2}$$

رکھو لا = ع - ۱ اس طرح ما، ع کا تفاعل بن جاتا ہے۔

$$\frac{فر ما}{فر ع} = \frac{فر ما}{فر لا} \times \frac{فر لا}{فر ع} = \frac{1}{لا^2 + 2لا + 2} = \frac{1}{ع^2 + 1}$$

اب اوپر کا تکملہ ع کا تفاعل ہے اور یہ اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$ما = \int \frac{فر ع}{ع^2 + 1} = \text{مس}^{-1} ع \text{ یعنی } ما = \text{مس}^{-1} (لا + 1)$$

متغیر کو بدلنے سے ہم متکمل کو ایک معلومہ شکل میں لے آئے ہیں، اس طرح تکمل آسان ہو گیا ہے۔
اب عام صورت پر غور کرو جہاں متکمل فا (لا) ہے۔ فرض کرو کہ ابدال لا = فہ (ع) کی مدد سے ما کو ع کا تفاعل بنایا گیا ہے، تب

$$\frac{فر ما}{فر ع} = \frac{فر ما}{فر لا} \times \frac{فر لا}{فر ع} = فا (لا) \frac{فر لا}{فر ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

مساوات (۱) میں فرلا/فرع کو لا = فہ(ع) سے معلوم کرو اور پھر نئے متکمل فا(لا) فرلا/فرع کو اسی مساوات کے ذریعہ ع کی رقوم میں بیان کرو۔ اس طرح مساوات (۱) لا سے پاک ہو جائیگی اور حاصل ہوگا

ما = ∫ فا(لا) فرلا/فرع فرع .... (۲)

یہ ممکن ہے کہ نیا متکمل جو اوپر حاصل ہوا ہے معیاری صورت میں ہو یا اگر ایسا نہ ہو تو بہ نسبت پرانے متکمل کے یہ زیادہ آسانی سے ایسی صورت میں تحویل ہو سکے، پس

ما = ∫ فا(لا) فرلا = ∫ فا(لا) فرلا/فرع فرع ...... (۳)

الفاظ میں متغیر کو بدلنے کا قاعدہ یوں بیان ہو سکتا ہے۔

فرلا کی بجائے (فرلا/فرع) فرع رکھو اور لا اور ع کے درمیان جو مساوات ہے اس کے ذریعہ نئے متکمل فا(لا) فرلا/فرع کو ع کی رقوم میں بیان کرو ۔ اس طرح تکملہ نئے متغیر ع کا تفاعل بن جائیگا۔

جب تکمل کا عمل اس طرح پورا ہو چکے تو تکملی تفاعل کو پرانے متغیر کی رقوم میں واپس لے آنا چاہیے۔

جب، لا = ا تو ع = عا اور جب، لا = ب تو ع = بہ اور اگر لا، ع کا باہمی ربط ایسا ہو کہ جب، لا ا سے ب تک مسلسل طور پر بدلے تو ع بھی عا سے بہ تک مسلسل طور پر بدلتا ہو تو

∫(ا سے ب) فا(لا) فرلا = ∫(عا سے بہ) فا(لا) فرلا/فرع فرع .... (۴)

ظاہر ہے کہ اس صورت میں پرانے متغیر کی طرف واپس آنے کی ضرورت نہیں۔

اوپر کے استحالوں (۳) اور (۴) کے استعمال کرنے میں یہ ضروری ہے کہ تکمل کے وقفوں ب۔ا اور بہ ۔ عہ کے درمیان لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں ع کی ایک اور صرف ایک قیمت ہو اور اسی طرح ع کی ہر ایک قیمت کے جواب میں لا کی ایک اور صرف ایک قیمت ہو، اگر لا اور ع کا باہمی ربط ایسا ہو کہ اس سے ع، لا کے کثیر القیمت تفاعل کے طور پر حاصل ہو یا لا، ع کے کثیر القیمت تفاعل کے طور پر ملے تو احتیاط سے مناسب قیمت کا انتخاب کرنا چاہیئے۔ [ملاحظہ ہو دفعہ ۸، مثال ۳ اور دفعہ ۱۴]

۵۔ متغیر بدلنے کی مثالیں

مثال ۱۔ جب، فا (لا) اس شکل سا (ا لا + ب) کا ہو

فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{ا لا} + \text{ب}$، $\text{فع} = \text{ا فلا}$، $\text{فلا} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{فع}$

$$\int \text{سا}(\text{ا لا}+\text{ب})\,\text{فلا} = \frac{1}{\text{ا}}\int \text{سا}(\text{ع})\,\text{فع}$$

یہ نمونہ اکثر واقع ہوتا ہے۔ مثلاً اگر $\text{ع} = \text{لا} - \frac{1}{4}$ تو

$$\int \frac{\text{فلا}}{2\,\text{لا}^2-\text{لا}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{فلا}}{(\text{لا}-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{فع}}{\text{ع}^2+\frac{7}{16}}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{7}}\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{4\,\text{ع}}{\sqrt{7}}\right) = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{4\,\text{لا}-1}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\int \frac{\text{فلا}}{\sqrt{2\,\text{لا}^2-\text{لا}+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\text{فلا}}{\sqrt{(\text{لا}-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{لوک}\left\{\text{لا}-\frac{1}{4}+\sqrt{\text{لا}^2-\frac{1}{2}\text{لا}+\frac{1}{2}}\right\}$$

مستقل جزو ضربی مثلاً ۲ حسب ضرورت تکملی علامت کے باہر نکال لیا جا سکتا ہے اسی طرح

اگر ضرورت ہو تو مستقل جزو ضربی داخل کر لیا جا سکتا ہے جیسا مثال ۲ میں۔

مثال ۲۔ جب، فا (لا) اس شکل سا $(\text{لا}^{\text{ن}})\,\text{لا}^{\text{ن}-1}$ کا ہو۔

فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{لا}^{\text{ن}}$، $\text{فع} = \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{فلا}$، $\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{فلا} = \frac{\text{فع}}{\text{ن}}$

$$\int \text{سا}(\text{لا}^{\text{ن}})\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{فلا} = \frac{1}{\text{ن}}\int \text{سا}(\text{ع})\,\text{فع}$$

پس جب، $\text{ع} = \text{لا}^{۲}$

$$\int \text{لا}\sqrt{\text{ا}\,\text{لا}^{۲}+\text{ب}}\;\text{فرلا} = \tfrac{۱}{۲}\int\sqrt{\text{ا}\,\text{ع}+\text{ب}}\;\text{فرع} = \frac{۱}{۳\,\text{ا}}(\text{ا}\,\text{ع}+\text{ب})^{\frac{۳}{۲}}$$

$$= (\text{ا}\,\text{لا}^{۲}+\text{ب})^{\frac{۳}{۲}} / ۳\,\text{ا}$$

اس تکملہ کی قیمت اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے اگر رکھا جائے کہ $\text{ع} = \sqrt{\text{ا}\,\text{لا}^{۲}+\text{ب}}$
یا $\text{ع}^{۲} = \text{ا}\,\text{لا}^{۲}+\text{ب}$ ۔ موخر الذکر ابدال سے

$$\text{لا فرلا} = \frac{۱}{\text{ا}}\,\text{ع فرع} \quad \text{اور} \quad \int \text{لا}\sqrt{\text{ا}\,\text{لا}^{۲}+\text{ب}}\;\text{فرلا} = \frac{۱}{\text{ا}}\int \text{ع}^{۲}\,\text{فرع} = \frac{\text{ع}^{۳}}{۳\,\text{ا}}$$

جو قیمت اوپر معلوم ہوئی ہے۔

مثال ۳۔ جب، $\text{فا}(\text{لا})$ اس شکل $[\text{سا}(\text{لا})]^{\text{ن}}\,\text{سا}'(\text{لا})$ کا ہو
فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{سا}(\text{لا})$، $\text{فرع} = \text{سا}'(\text{لا})\,\text{فرلا}$

$$\text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \text{ع}^{\text{ن}}\,\text{فرع}$$

اور تکملہ قوت کی شکل میں ہوگا اگر ن، -۱ کے مساوی نہ ہو اور لوکارتم کی شکل میں ہوگا اگر $\text{ن} = -۱$

$$(۳\,\text{ا})\quad \int [\text{سا}(\text{لا})]^{\text{ن}}\,\text{سا}'(\text{لا})\,\text{فرلا} = \frac{۱}{\text{ن}+۱}[\text{سا}(\text{لا})]^{\text{ن}+۱} \quad \text{جبکہ } \text{ن} \neq -۱$$

$$(۳\,\text{ب})\quad \int \frac{\text{سا}'(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,[\text{سا}(\text{لا})]$$

(۳ ب) سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب متکمل ایک کسر ہو جس کا شمار کنندہ نسب نما کا مشتق ہے تو اس کا تکملہ نسب نما کا لوکارتم ہوتا ہے۔

بعض اوقات متکمل کو مثال ۳ کی شکل میں لانے کے لئے ایک مستقل جزو ضربی کا شریک کرنا ضروری ہوتا ہے۔ مثلاً ذیل کے سوالوں میں

$$(۱)\quad \int \frac{(\text{لا}-۱)\,\text{فرلا}}{\sqrt{۲\,\text{لا}^{۲}-۴\,\text{لا}+۱}} = \frac{۱}{۴}\int (۲\,\text{لا}^{۲}-۴\,\text{لا}+۱)^{-\frac{۱}{۲}}(۴\,\text{لا}-۴)\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{۲\,\text{لا}^{۲}-۴\,\text{لا}+۱}$$

(۲) $\int \frac{(لا + عہ)\, فرلا}{(لا + عہ)^۲ + یہ^۲} = \frac{۱}{۲}\, لوک \{(لا + عہ)^۲ + یہ^۲\}$

(۳) $\int سس\, لا\, فرلا = - \int \frac{-جب\, لا}{جم\, لا}\, فرلا = - لوک\, جم\, لا = لوک\, قط\, لا$

(۴) $\int سس^۳ لا\, فرلا = \int سس\, لا\, (قط^۲ لا - ۱)\, فرلا = \int سس\, لا\, قط^۲ لا\, فرلا - \int سس\, لا\, فرلا$
$= \frac{۱}{۲} سس^۲ لا + لوک\, جم\, لا$

مثال ۴۔ $فا(لا) = جب^م لا\, جم^ن لا$

(۱) اگر م، ن میں سے کوئی ایک بھی طاق مثبت صحیح عدد ہو تو تکمل باسانی عمل میں آسکتا ہے۔ جب م طاق ہو تو رکھو $ع = جم\, لا$ اور جب ن طاق ہو تو رکھو $ع = جب\, لا$۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ $فا(لا) = جب^{\frac{۱}{۲}} لا\, جم^۵ لا$

رکھو $ع = جب\, لا$، $فرع = جم\, لا\, فرلا$، $جم^۴ لا = (۱ - ع^۲)^۲$

$\int جب^{\frac{۱}{۲}} لا\, جم^۵ لا\, فرلا = \int (ع^{\frac{۱}{۲}} - ۲ع^{\frac{۵}{۲}} + ع^{\frac{۹}{۲}})\, فرع = \frac{۲}{۳} ع^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۴}{۷} ع^{\frac{۷}{۲}} + \frac{۲}{۱۱} ع^{\frac{۱۱}{۲}}$

$= جب^{\frac{۳}{۲}} لا \left(\frac{۲}{۳} - \frac{۴}{۷} جب^۲ لا + \frac{۲}{۱۱} جب^۴ لا\right)$

$\int_0^{\frac{\pi}{۲}} جب^{\frac{۱}{۲}} لا\, جم^۵ لا\, فرلا = \int_0^۱ (ع^{\frac{۱}{۲}} - ۲ع^{\frac{۵}{۲}} + ع^{\frac{۹}{۲}})\, فرع = \frac{۲}{۳} - \frac{۴}{۷} + \frac{۲}{۱۱} = \frac{۶۴}{(۲۳۱)}$

اسی طرح سے اگر $ع = جم\, لا$، $فرع = -جب\, لا\, فرلا$

$\int جب^۵ لا\, فرلا = -\int (۱ - ع^۲)^۲\, فرع = -(ع - \frac{۲}{۳} ع^۳ + \frac{۱}{۵} ع^۵)$
$= -جم\, لا + \frac{۲}{۳} جم^۳ لا - \frac{۱}{۵} جم^۵ لا$

(۲) جب م + ن جفت منفی صحیح عدد ہو۔ ایسی صورت میں فرض کرو کہ $ع = سس\, لا$ (یا ظم لا)، نیا تکمل مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا جاسکیگا مثلاً

$\int \frac{فرلا}{جب^۵ لا\, جم^۳ لا} = \int \frac{(۱ + ع^۲)^۳}{ع^۵} \cdot \frac{فرع}{۱ + ع^۲} = \int \left(\frac{۱}{ع^۵} + \frac{۳}{ع^۳} + \frac{۳}{ع} + ع\right) فرع$

اور تکملہ باسانی لا کی رقوم میں حاصل ہوسکتا ہے۔

مثال ۵ - اگر فا(لا)، لا اور $\sqrt{\text{ا لا} + \text{ب}}$ کا منطق تفاعل ہو تو تعویض یا ابدال $\text{ا لا} + \text{ب} = \text{ع}^{۲}$ سے نیا تکمل ع کا منطق تفاعل بن جائیگا۔

مثلاً اگر $\text{لا} + ۱ = \text{ع}^{۲}$ تو

$$\int \text{لا}^{۲} \sqrt{\text{لا} + ۱}\ \text{فلا} = ۲\int (\text{ع}^{۲} - ۱)^{۲}\, \text{ع}^{۲}\, \text{فع} = ۲\left(\frac{۱}{۷}\text{ع}^{۷} - \frac{۲}{۵}\text{ع}^{۵} + \frac{۱}{۳}\text{ع}^{۳}\right)$$

اور تھوڑی سی تحویل کے بعد $= ۲\sqrt{(\text{لا}+۱)^{۳}}\ (۱۵\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲} - ۴\,\text{لا} + ۸) / ۱۰۵$

اوپر کی مثالوں میں متغیر بدلنے کی ابتدائی مشہور صورتیں جو اکثر واقع ہوتی ہیں حل کی گئی ہیں طالب علم ان کا غور سے مطالعہ کرے اور اس کے بعد مشق ۲ کے اوائل کی مثالوں کے حل کرنے کی کوشش کرے۔ کافی مشق بہم پہنچانے سے ہی اسکے لئے ایسی تحویلوں کے استعمال میں سہولت پیدا ہو سکتی ہے۔

۶ - دوسرے درجہ کے تفاعل - اگر $\text{س} = \text{ا لا}^{۲} + \text{ب لا} + \text{ج}$ اور ف(لا) ایک منطق صحیح تفاعل ہو تو $\frac{\text{ف(لا)}}{\text{س}}$ ایک ایسے مجموعہ کی شکل میں بیان ہو سکتا ہے جو ایک منطق صحیح تفاعل اور ایک کسر واجب $\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\text{س}}$ پر مشتمل ہو۔

ہم اِن شکلوں $\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\text{س}}$ اور $\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{س}}}$ پر بحث کرینگے۔

مبتدیوں کے لئے آسانی اس میں ہوگی کہ س کو ذیل کی صورت میں لکھا جائے

$$\text{س} = \text{ا}\left(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{۲\text{ا}}\right)^{۲} + \frac{۴\text{اج} - \text{ب}^{۲}}{۴\text{ا}}$$

اگر ا مثبت ہو تو اسے ہم +۱ کے مساوی لے سکتے ہیں اور اگر ا منفی ہو تو اسے −۱ کے مساوی لیا جاسکتا ہے، ایسا کرنے میں حل کی عمومیت میں فرق نہیں آتا کیونکہ مستقل جزوِ ضربی ہمیشہ تکملی علامت کے باہر نکال لیا جا سکتا ہے۔

اگر $۴\text{اج} - \text{ب}^{۲}$ مثبت ہو تو س کے اجزائے ضربی خیالی ہوں گے اور س اِس شکل کا ہوگا

$$\text{س} = (\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2 \qquad \ldots\ldots (۱)$$

اگر ۴ا ج - ب² منفی ہو تو س کے اجزائے ضربی حقیقی ہونگے اور اگر

$$\text{ا} = +۱ \ \text{تو}\ \ \text{س} = (\text{لا} + \text{عہ})^2 - \text{بہ}^2 \qquad \ldots\ldots (۲)$$

$$\text{ا} = -۱ \ \text{تو}\ \ \text{س} = \text{بہ}^2 - (\text{لا} + \text{عہ})^2 \qquad \ldots\ldots (۳)$$

صورت اول - $\dfrac{\text{الا} + \text{ب}}{\text{س}}$

(۱) اگر س کے اجزائے ضربی حقیقی ہوں تو اس کسر کو دفعہ ۳ مثال ۲ کی مانند جزوی کسروں میں تحلیل کیا جائے۔

(۲) اگر س کے اجزائے ضربی خیالی ہوں تو س = (لا + عہ)² + بہ²، ہم اس صورت میں کسر کو اس طرح بدل سکتے ہیں کہ دفعہ ۵ مثال ۳ اور مثال ۱ کی طرح متغیر بدلنے سے حل عمل میں آ سکے۔

لہ اور مہ ایسے معلوم کرو کہ

$$\text{الا} + \text{ب} = \text{لہ}(۲\text{لا} + ۲\text{عہ}) + \text{مہ}،\quad \text{لہ} = \tfrac{1}{2}\text{ا}،\quad \text{مہ} = \text{ب} - \text{عہ ا}$$

اس لئے

$$\frac{\text{الا}+\text{ب}}{\text{س}} = \text{لہ}\,\frac{۲\text{لا} + ۲\text{عہ}}{(\text{لا}+\text{عہ})^2 + \text{بہ}^2} + \text{مہ}\,\frac{1}{(\text{لا}+\text{عہ})^2 + \text{بہ}^2}$$

اور

$$\int \frac{(\text{الا}+\text{ب})}{\text{س}}\,\text{فرلا} = \text{لہ لوک}\left\{(\text{لا}+\text{عہ})^2 + \text{بہ}^2\right\} + \frac{\text{مہ}}{\text{بہ}}\,\text{سس}^{-1}\left(\frac{\text{لا}+\text{عہ}}{\text{بہ}}\right)$$

پہلا تکملہ دفعہ ۵ مثال ۳ کی صورت ہے اور دوسرا دفعہ ۵ مثال ۱ کی۔

صورت دوم - $\dfrac{\text{الا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{س}}}$

(۱) س فرض کرو کہ (لا + عہ)² + بہ² ہے یا (لا + عہ)² - بہ²

الا + ب کے لئے اوپر کی تحویل عمل میں لاؤ

$$\int \frac{(\text{الا}+\text{ب})\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{س}}} = \text{لہ}\int \frac{(۲\text{لا} + ۲\text{عہ})\,\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}+\text{عہ})^2 \pm \text{بہ}^2}} + \text{مہ}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}+\text{عہ})^2 \pm \text{بہ}^2}}$$

$$= ۲\,\text{لہ}\sqrt{\text{س}} + \text{مہ لوک}\left\{(\text{لا}+\text{عہ}) + \sqrt{(\text{لا}+\text{عہ})^2 \pm \text{بہ}^2}\right\}$$

(۲) فرض کرو کہ $\text{س} = \text{ب}^2\text{م}^2 - (\text{لا} + \text{عم})^2$، تب

$$\int \frac{(\text{ا لا} + \text{ب})\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{س}}} = -\text{لم} \int \frac{-(\text{۲لا} + \text{۲عم})\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ب}^2\text{م}^2 - (\text{لا} + \text{عم})^2}} + \text{مم} \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ب}^2\text{م}^2 - (\text{لا} + \text{عم})^2}}$$

$$= -\text{۲لم}\sqrt{\text{س}} + \text{مم}\ \text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{لا} + \text{عم}}{\text{بم}}\right)$$

جب، ا = ۰ تو ل = ۰ تو تکمل دفعہ ۵ مثال ۱ کے نمونہ کی ہے۔

عددی مثالوں کے حل کرنے میں سب سے پہلے س کا مشتق معلوم کرلینا چاہئے، اس کے بعد ا لا + ب کو مطلوبہ شکل میں رکھ لینا آسان ہوگا۔

مثال ۱- $$\int \frac{(\text{۳لا} + \text{۱})\,\text{فرلا}}{\text{۲لا}^2 + \text{لا} + \text{۳}}$$

عمل: $(\text{۲لا}^2 + \text{لا} + \text{۳})' = \text{۴لا} + \text{۱}$، $\text{۳لا} + \text{۱} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}(\text{۴لا} + \text{۱}) + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}$

$$\text{۲لا}^2 + \text{لا} + \text{۳} = \text{۲}\left\{\left(\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right)^2 + \frac{\text{۲۳}}{\text{۱۶}}\right\}$$

$$\text{تکملہ} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\int \frac{(\text{۴لا} + \text{۱})\,\text{فرلا}}{\text{۲لا}^2 + \text{لا} + \text{۳}} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}}\int \frac{\text{فرلا}}{\left(\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right)^2 + \frac{\text{۲۳}}{\text{۱۶}}}$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\ \text{لوک}(\text{۲لا}^2 + \text{لا} + \text{۳}) + \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲۳}}}\ \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{۴لا} + \text{۱}}{\sqrt{\text{۲۳}}}\right)$$

مثال ۲- $$\int \frac{(\text{۳لا} + \text{۱})\,\text{فرلا}}{\sqrt{-\text{۲لا}^2 + \text{لا} + \text{۳}}}$$

$$\text{۳لا} + \text{۱} = -\frac{\text{۳}}{\text{۴}}(-\text{۴لا} + \text{۱}) + \frac{\text{۷}}{\text{۴}}$$

$$\sqrt{-\text{۲لا}^2 + \text{لا} + \text{۳}} = \sqrt{\text{۲}}\sqrt{\frac{\text{۲۵}}{\text{۱۶}} - \left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right)^2}$$

$$\text{تکملہ} = -\frac{\text{۳}}{\text{۴}}\int \frac{(-\text{۴لا} + \text{۱})\,\text{فرلا}}{\sqrt{-\text{۲لا}^2 + \text{لا} + \text{۳}}} + \frac{\text{۷}}{\text{۴}\sqrt{\text{۲}}}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\frac{\text{۲۵}}{\text{۱۶}} - \left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\right)^2}}$$

$$= -\frac{۳}{۲}\sqrt{-۲\text{لا}^2+\text{لا}+۳}+\frac{۷}{۲\sqrt{۲}}\,\text{جب}^{-1}\left(\frac{۴\text{لا}-۱}{۵}\right)$$

یہ نمونے

$$\frac{۱}{\text{لا}\sqrt{\text{ا}\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج}}}\ ،\quad \frac{۱}{(\text{م}\,\text{لا}+\text{ن})\sqrt{\text{ا}\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج}}}$$

اوپر کی صورتوں میں تحویل ہو جائینگے اگر متغیر کو بالترتیب ان روابط $\text{لا}=\frac{۱}{\text{ع}}$ اور $\text{م}\,\text{لا}+\text{ن}=\frac{۱}{\text{ع}}$ کے ذریعہ بدلا جائے۔ لوکارثمی تفرق سے ان سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}=-\frac{\text{فرع}}{\text{ع}}\quad\text{اور}\quad\frac{\text{فرلا}}{\text{م}\,\text{لا}+\text{ن}}=-\frac{۱}{\text{م}}\,\frac{\text{فرع}}{\text{ع}}$$

لا کی بجائے $\frac{۱}{\text{ع}}$ لکھکر متغیر کا بدلنا اور صورتوں میں بھی سودمند ہوتا ہے، مثلاً

$$\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}=-\int\frac{\text{ع}\,\text{فرع}}{(\text{ا}^2\text{ع}^2+۱)^{\frac{3}{2}}}=\frac{۱}{\text{ا}^2(\text{ا}^2\text{ع}^2+۱)^{\frac{1}{2}}}$$

لا کی رقوم میں بیان کرنے سے

$$=\frac{\text{لا}}{\text{ا}^2(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

زیادہ عام صورت $\frac{۱}{(\text{ا}\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج})^{\frac{3}{2}}}$ اسی طرح حل ہوسکیگی اگر دو درجی جملہ کو اس شکل میں بیان کر لیا جائے جو اس دفعہ کے شروع میں دی گئی ہے۔

۷ ۔ مثلثی اور زائدی ابدال ۔ دوسرے درجہ کے تفاعل کے ساتھ عمل کرنیکا ایک اور طریقہ یہ ہے کہ مثلثی یا زائدی ابدال کے ذریعہ اسے تحویل کیا جائے، تفاعل کی شکل سے مناسب تحویل کا پتہ چلیگا۔

$\text{ا}^2-\text{لا}^2$ ، $\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}$ ، $\text{لا}=\text{ا}\,\text{جب}\,\text{طہ}$ یا $\text{لا}=\text{ا}\,\text{جم}\,\text{طہ}$

$\text{لا}^2+\text{ا}^2$ ، $\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}$ ، $\text{لا}=\text{ا}\,\text{مس}\,\text{طہ}$ یا $\text{لا}=\text{ا}\,\text{جبز}\,\text{طہ}$

$\text{لا}^2-\text{ا}^2$ ، $\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}$ ، $\text{لا}=\text{ا}\,\text{قط}\,\text{طہ}$ یا $\text{لا}=\text{ا}\,\text{جمز}\,\text{طہ}$

$\sqrt{\text{ب}^2-(\text{لا}+\text{ح})^2}$ ، $\text{لا}+\text{ح}=\text{ب}\,\text{جب}\,\text{طہ}$ ، وغیرہ

مثال ۱ ۔ اگر $\text{لا}=\text{ا}\,\text{جب}\,\text{طہ}$ ، $\text{فرلا}=\text{ا}\,\text{جم}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ}$

$$\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \text{ا}^2 \int \text{جم}^2\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{\text{ا}^2}{۲}(\text{طہ} + \text{جب طہ جم طہ})$$

$$\text{اس لئے} \int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\ \text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\ \text{جب}^{-۱}\ \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

مثال ۲ - اگر لا = ا جنز طہ، فرلا = ا جمز طہ فرطہ

$$\int \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}\ \text{فرلا} = \text{ا}^2 \int \text{جمز}^2\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{\text{ا}^2}{۲}(\text{طہ} + \text{جنز طہ جمز طہ})$$

$$\text{اسلئے} \int \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\ \text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\ \text{جنز}^{-۱}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$$

نیز اگر لا = ا جمز طہ تو

$$\int \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\ \text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2} - \frac{\text{ا}^2}{۲}\ \text{جمز}^{-۱}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$$

مثال ۳ - اگر لا + ۲ = $\sqrt{۳}$ مس طہ تو فرلا = $\sqrt{۳}$ قط² طہ فرطہ

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2 + ۴\text{لا} + ۷)^2} = \int \frac{\sqrt{۳}\ \text{قط}^2\text{طہ فرطہ}}{(۳\ \text{قط}^2\text{طہ})^2} = \frac{\sqrt{۳}}{۹}\int \text{جم}^2\text{طہ فرطہ}$$

$$= \frac{۱}{۶}\ \frac{\text{لا}+۲}{\text{لا}^2 + ۴\text{لا} + ۷} + \frac{\sqrt{۳}}{۱۸}\ \text{مس}^{-۱}\left(\frac{\text{لا}+۲}{\sqrt{۳}}\right)$$

محدود تکملوں کی صورت میں مثلثی ابدال نہایت کار آمد ثابت ہوتے ہیں ۔

۸ ۔ **مثلثی متکمل** ۔ جیب اور جیب التمام کی قوتوں اور حاصل ضربوں کا تکمل دفعہ ۳ مثال ۴، دفعہ ۵ مثال ۴ اور دفعہ ۱۰ امثلہ ۲، ۳ کے طریقوں سے عمل میں آسکتا ہے ۔ لیکن ایک اور طریقہ بھی ہے جو اکثر مفید ثابت ہوتا ہے ۔ جب متکمل جب لا یا جم لا کا منطق تفاعل ہو تو ابدال ع = مس $\frac{\text{لا}}{۲}$ کے ذریعہ تکملہ ع کے منطق جبریہ تفاعل میں تحویل ہوسکیگا کیونکہ

$$\text{جب لا} = \frac{۲\text{ع}}{۱+\text{ع}^2},\quad \text{جم لا} = \frac{۱-\text{ع}^2}{۱+\text{ع}^2},\quad \text{فرلا} = \frac{۲\ \text{فرع}}{۱+\text{ع}^2}$$

ذیل کی مثالوں ۱ تا ۳ کو معیاری صورتوں میں شمار کیا جائے، ہر صورت میں اندراج $\text{ع} = \text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$ ہے۔

مثال ۱۔ $\int \frac{\text{فر لا}}{\text{جب لا}} = \int \frac{\text{فر ع}}{\text{ع}} = \text{لوک ع} = \text{لوک مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

مثال ۲۔ $\int \frac{\text{فر لا}}{\text{جم لا}} = \int \frac{۲\,\text{فر ع}}{۱-\text{ع}^{۲}} = \text{لوک}\,\frac{۱+\text{ع}}{۱-\text{ع}} = \text{لوک}\,\frac{۱+\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}}{۱-\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}}$

یہ تکملہ کئی صورتوں میں بیان ہو سکتا ہے جیسے

$\text{لوک مس}\left(\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\pi}{۴}\right)$ یا $\frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{جب لا}}{۱-\text{جب لا}}$

ابدال $\text{و} = \frac{\pi}{۲} - \text{لا}$ یا $\text{و} = \text{لا} - \frac{\pi}{۲}$ سے $\frac{۱}{\text{جم لا}}$ کا تکملہ $\frac{۱}{\text{جب لا}}$ کے تکملہ میں تحویل ہو سکیگا۔

مثال ۳۔ $\int \frac{\text{فر لا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}} = \int \frac{۲\,\text{فر ع}}{\text{ا}(۱+\text{ع}^{۲})+\text{ب}(۱-\text{ع}^{۲})} = ۲\int \frac{\text{فر ع}}{(\text{ا}+\text{ب})+(\text{ا}-\text{ب})\text{ع}^{۲}}$

فرض کرو کہ ا + ب مثبت ہے، تب تین صورتیں ہیں، ب تعداداً کم ہو ا سے یا بڑا ہو ا سے یا برابر ہو ا کے۔

(۱) $\text{ب}^{۲} < \text{ا}^{۲}$ اور اسلئے ب < ا تعداداً۔

$\int \frac{\text{فر لا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}} = \frac{۲}{\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{ب}^{۲}}}\,\text{مس}^{-۱}\left(\text{ع}\sqrt{\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}}}\right)، \quad \text{ع} = \text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

(۲) $\text{ب}^{۲} > \text{ا}^{۲}$ اور اسلئے ب - ا مثبت ہے

$\int \frac{\text{فر لا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}} = \frac{۱}{\sqrt{\text{ب}^{۲}-\text{ا}^{۲}}}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{\text{ب}+\text{ا}} + \text{ع}\sqrt{\text{ب}-\text{ا}}}{\sqrt{\text{ب}+\text{ا}} - \text{ع}\sqrt{\text{ب}-\text{ا}}}$

(۳) $\text{ب}^{۲} = \text{ا}^{۲}$، $\int \frac{\text{فر لا}}{\text{ا}+\text{ا جم لا}} = \frac{۱}{\text{ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

$\int \frac{\text{فر لا}}{\text{ا}-\text{ا جم لا}} = -\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{مم}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

صورت دوم ایسی ضروری نہیں جیسی (ا) تکملہ (۱) کی قیمت ایک اور شکل میں لکھی جا سکتی ہے جسے یاد رکھنا آسان ہے، ملاحظہ ہو حسب ذیل۔

رکھو طا = ۲ مس$^{-1}$ { مس $\frac{لا}{۲}$ × $\sqrt{\frac{ا - ب}{ا + ب}}$ } اس سے

جم طا = $\frac{ا جم لا + ب}{ا + ب جم لا}$ یا (ا - ب جم طا) (ا + ب جم لا) = ا^{۲} - ب^{۲}

اگر ایک قطع ناقص ہو جسکا خروج المرکز $\frac{ب}{ا}$ ہے تو لا اسکا اصلی اور طا خروج المرکز زاویہ بیقاعدگی ہے۔ (ملاحظہ ہو تو ڈ فرے کی کتاب علم ہیئت دفعہ ۱۸۶، گر مے کا رسالہ طبیعیات دفعہ ۵۲۰)

ا + ب جم لا اپنی قیمتوں کی پوری سعت میں سے گذر جاتا ہے جبکہ لا صفر سے π تک بدلتا ہے یا - π سے صفر تک منفی قیمتوں میں سے ہوتا ہوا بدلتا ہے۔ اگر لا صفر اور π کے درمیان رہے تو طا مثبت ہوتا ہے اور صفر تا π کے درمیان واقع ہوتا ہے لیکن اگر لا، - π اور صفر کے درمیان واقع ہو تو طا منفی ہوتا ہے اور - π اور صفر کے درمیان واقع ہوتا ہے اسلئے مقلوب جیب التمام پر جو قید (دفعات ۲۸، ۴۴) میں لگائی گئی ہے اسکو ملحوظ رکھتے ہوئے

$$\int \frac{ف لا}{ا + ب جم لا} = \frac{۱}{\sqrt{ا^{۲} - ب^{۲}}} جم^{-1} \left(\frac{ا جم لا + ب}{ا + ب جم لا} \right) \text{ اگر } ۰ \leqq لا \leqq π$$

$$\text{لیکن } = -\frac{۱}{\sqrt{ا^{۲} - ب^{۲}}} جم^{-1} \left(\frac{ا جم لا + ب}{ا + ب جم لا} \right) \text{ اگر } -π \leqq لا \leqq ۰$$

جب تکملہ کو مماس مقلوب کی رقوم میں بیان کیا جائے تو ایسا اشتباہ واقع نہیں ہوتا۔

مثال ۴۔ $\int \frac{ف لا}{ا + ب جب لا}$، ا مثبت، $-\frac{π}{۲} < لا < \frac{π}{۲}$

$$\text{تکملہ} = \int \frac{۲ ف ع}{ا + ۲ ب ع + ا ع^{۲}}$$

اگر ب^{۲} < ا^{۲} تو ربط لا = $\frac{π}{۲}$ - و یا لا = $\frac{π}{۲}$ + و سے تکملہ مثال ۳ (ا) میں تحویل ہو جائیگا۔ طالب علم کو یہ دونوں ابدال عمل میں لانا چاہئیں۔ اس طرح اُسے معلوم ہوگا کہ طا کی صرف ایک قیمت کو ہی جو جم طا سے حاصل ہوتی ہے ملحوظ رکھنا کافی نہیں ہے

یہ ابدال اس امر کی اچھی مثال ہے کہ مقلوب تفاعلوں کے ساتھ عمل کرنے میں نہایت احتیاط سے کام لینا چاہئے۔ کوئی اشتباہ واقع نہیں ہوتا اگر مثال ۳ (ا) کا تکملہ مقلوب مماس کی رقوم میں استعمال کیا جائے۔

مثال ۵۔ $\int \frac{\text{ف لا}}{\text{ا + ب جم لا + ج جب لا}}$ ، ا مثبت

اگر $\text{ب}^2 + \text{ج}^2 = \text{ک}^2$ تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ا + ب جم لا + ج جب لا = ا + ک جم (لا - عہ)}$$

اور تکملہ مثال (۳) کی شکل میں آجاتا ہے۔

اگر $\text{ک}^2 < \text{ا}^2$ تو تکملہ ہے

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2}} \text{جم}^{-1} \left[\frac{\text{ا جم (لا - عہ) + ک}}{\text{ا + ک جم (لا - عہ)}} \right]$$

علامت مثبت ہوگی اگر لا - عہ ، صفر اور π کے درمیان واقع ہو اور منفی ہوگی اگر یہ $-\pi$ اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

مشق ۲

امثلہ ا تا ۱۲ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو

۱- $\frac{1}{\text{۲لا}^2 + \text{۳لا} + 4}$ ۲- $\frac{1}{\sqrt{\text{ا لا} - \text{لا}^2}}$ ۳- $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا لا}}}$

۴- $\frac{1}{\sqrt{\text{(لا - ا)(ب - لا)}}}$ ۵- $\frac{\text{لا}}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$ ۶- $\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}}$

۷- $\frac{\text{لا}^2}{\text{لا}^2 - 1}$ ۸- $\frac{\text{لا}}{\text{لا}^4 + \text{لا}^2 + 1}$ ۹- $\frac{\text{لا} + 1}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{۲لا} - 3}}$

۱۰- مم لا ۱۱- $\frac{\text{جم لا}}{\text{۱ + جب لا}}$ ۱۲- $\frac{\text{۱ + جم لا}}{\text{لا + جب لا}}$

۱۳- $مس^{۳} لا$ ۱۴- $مم^{۵} لا$ ۱۵- $\frac{۱}{ا^{۲} جم^{۲} لا + ب^{۲} جب^{۲} لا}$

۱۶- $جب^{۶} لا$ ۱۷- $جب^{۵} لا \, جم^{۴} لا$ ۱۸- $\frac{۱}{جب^{۲} لا \, جم^{۲} لا}$

۱۹- $\frac{جب \, لا}{جم^{۵} لا}$ ۲۰- $لا \sqrt{۱ - لا}$ ۲۱- $\frac{لا}{\sqrt{۱ - لا}}$

۲۲- $\frac{۱}{\sqrt{لا + ۱} + \sqrt{لا - ۱}}$

۲۳- ذیل کے تکملوں کی قیمتیں دریافت کرو

(۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جب^{۵} لا \, فرلا$ (۲) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جب^{۳} لا \, جم^{۵} لا \, فرلا$ (۳) $\int_{0}^{\pi} \frac{فرلا}{ا^{۲} جم^{۲} لا + ب^{۲} جب^{۲} لا}$

(۴) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جم \, لا \, فرلا}{۳ - جب^{۲} لا}$ (۵) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} مس \, لا \, فرلا$ (۶) $\int_{0}^{۱} \frac{فرلا}{۱ + لا + لا^{۲}}$

(۷) $\int_{0}^{۱} \frac{فرلا}{۱ - لا + لا^{۲}}$ (۸) $\int_{0}^{\pi} \frac{جب \, لا \, فرلا}{۱ + جم^{۲} لا}$

امثلہ ۲۴ تا ۴۱ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو

۲۴- $\frac{لا + ۱}{لا^{۲} + لا + ۱}$ ۲۵- $\frac{لا^{۲} - ۱}{لا^{۲} + ۱}$ ۲۶- $\frac{لا^{۲} + ۷}{لا^{۲} + ۲لا + ۳}$

۲۷- $\frac{لا^{۳} + لا}{لا^{۲} - ۴}$ ۲۸- $\frac{(لا + ۱)^{۲}}{(لا - ۱)^{۲}}$ ۲۹- $\sqrt{\frac{۱ + لا}{۱ - لا}}$

۳۰- $\sqrt{\frac{لا + ۱}{لا - ۱}}$ ۳۱- $\sqrt{\frac{لا + ۱}{لا}}$ ۳۲- $\sqrt{\frac{۱ - لا}{لا}}$

۳۳- $\frac{۱}{لا \sqrt{۸لا^{۲} + ۲لا - ۱}}$ ۳۴- $\frac{۱}{(لا + ۱)\sqrt{لا^{۲} - ۱}}$ ۳۵- $\frac{۱}{(لا - ۱)\sqrt{لا^{۲} - ۱}}$

۳۶- $\frac{1}{(\text{لا}+1)\sqrt{1-\text{لا}-\text{لا}^2}}$　　۳۷- $\frac{1}{(\text{لا}-1)\sqrt{1-\text{لا}^2}}$　　۳۸- $\frac{1}{\text{لا}(\text{لا}^{\text{ن}}+1)}$

۳۹- $\frac{1}{(\text{لا}^2+2\text{لا}+3)^{\frac{3}{2}}}$　　۴۰- $\frac{1}{1+\text{سس لا}}$　　۴۱- $\frac{\text{جم لا}+\text{جب لا}}{\text{جب لا}+2\,\text{جم لا}}$

۴۲- ذیل کے تکملوں کی قیمتیں دریافت کرو

(۱) $\int_0^{\pi}\frac{\text{فرلا}}{5+3\,\text{جم لا}}$　(۲) $\int_0^{2\pi}\frac{\text{فرلا}}{5+3\,\text{جم لا}}$　(۳) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{فرلا}}{5+3\,\text{جب لا}}$

(۴) $\int_0^{\pi}\frac{\text{فرلا}}{1-2\text{ر}\,\text{جم لا}+\text{ر}^2}$ $(\text{ر}^2\neq 1)$　(۵) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{فرلا}}{1+\text{جم عہ}\,\text{جم لا}}$ $(0<\text{عہ}<\pi)$

(۶) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{فرلا}}{1-\text{ک}^2\,\text{جب}^2\text{لا}}$ $(\text{ک}^2<1)$　(۷) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{فرلا}}{3+5\,\text{جم لا}}$

۴۳- $\int_{-1}^{+1}\frac{\text{جب عہ}\,\text{فرلا}}{1-2\text{لا}\,\text{جم عہ}+\text{لا}^2}$ کی قیمت دریافت کرو

(۱) جبکہ $0<\text{عہ}<\pi$　(۲) جبکہ $\pi<\text{عہ}<2\pi$

۴۴- اگر ا مثبت ہو اور ب عدداً کم ہو ا سے تو ابدال $\text{جم طہ}=\frac{\text{ا جم لا}+\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}}$ کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$\int_0^{\pi}\frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}+\text{ب جم لا})^{\text{ن}}}=\frac{1}{(\text{ا}^2-\text{ب}^2)^{\text{ن}-\frac{1}{2}}}\int_0^{\pi}(\text{ا}-\text{ب جم طہ})^{\text{ن}-1}\,\text{فرطہ}$$

۴۵- جو منحنی مساوات $\text{ا}\,\text{ما}^2=\text{لا}^2(\text{ا}-\text{لا})$ سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو اور اس کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو -

۴۶- جو منحنی مساوات $\text{ا}^2\text{ما}^2=\text{لا}^2(\text{ا}^2-\text{لا}^2)$ سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو اور اسکے دونوں حلقوں کا رقبہ دریافت کرو -

۴۷- جس منحنی کی قطبی مساوات $\text{ر}=\text{ا}+\text{ب جم طہ}$ ہے اُسے مرتسم کرو $\text{ا}>\text{ب}>0$ ۔ اور جو رقبہ یہ گھیرتا ہے اُسے محسوب کرو -

۴۸- ایک قطع ناقص کی کارتیسی مساوات $\text{ا لا}^2+2\,\text{ھ لا ما}+\text{ب ما}^2=1$ ہے،

اسکو قطبی محددوں میں تحویل کرکے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

$$\text{رقبہ} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,\text{ر}^2\,\text{فرطہ} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{ا جم}^2\text{طہ} + 2\,\text{ھ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2\text{طہ}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\text{اب} - \text{ھ}^2}}$$

۹۔ تکمل بالحصص ۔ تکمل کا دوسرا عام طریقہ ہے جسے ہم "تکمل بالحصص" کہینگے۔ یہ مسئلہ حاصل ضرب کے تفرق کے مسئلہ کے مماثل ہے اگر ہم تکمل کو لاحقہ سے اور تفرق کو زبر سے تعبیر کریں، مثلاً

$$\text{ع}_1 = \int \text{ع فرلا}\ ،\ \text{عَ} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

تو حاصل ضرب کو تفرق کرنے کے قاعدہ کے موافق

$$\frac{\text{فر(ع}_1\text{و)}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}_1}{\text{فرلا}}\,\text{و} + \text{ع}_1\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$$

یعنی $\frac{\text{فر(ع}_1\text{و)}}{\text{فرلا}} = \text{ع و} + \text{ع}_1\text{وَ}$ چونکہ $\frac{\text{فرع}_1}{\text{فرلا}} = \text{ع}$

$$\text{پس}\quad \text{ع}_1\text{و} = \int(\text{ع و} + \text{ع}_1\text{وَ})\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$= \int \text{ع و فرلا} + \int \text{ع}_1\text{وَ فرلا}$$

$$\text{اس لئے}\quad \int \text{ع و فرلا} = \text{ع}_1\text{و} - \int \text{ع}_1\text{وَ فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

مساوات (۲) سے مسئلہ مطلوب حاصل ہوتا ہے، ایسا ممکن ہے کہ $\text{ع}_1\text{وَ}$ کا تکملہ ع و کے تکملہ کی نسبت زیادہ آسانی سے معلوم ہو سکے۔

محدود تکملہ کی صورت میں جبکہ نچلی حد ا ہو اور اوپر کی ب، (۱) کے جواب میں حاصل ہوگا

$$\left[\text{ع}_1\text{و}\right]_{\text{ا}}^{\text{ب}} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} (\text{ع و} + \text{ع}_1\text{وَ})\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اور (۲) کی بجائے

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ع}_1\, \text{وَ فرلا} = [\text{ع}_1\, \text{و}]_{\text{ا}}^{\text{ب}} - \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ع و فرلا} \quad ......(\text{۴})$$

جہاں علامت $[\text{ع}_1\, \text{و}]_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ سے مراد ہے کہ پہلے لا کی بجائے ب رکھا جائے پھر ا اور دوسرے نتیجہ کو پہلے سے تفریق کیا جائے۔

امثلہ ذیل سے مسئلہ کی اہمیت معلوم ہوگی۔

مثال ۱۔ $\int \text{لا جم لا فرلا}$ معلوم کرو

یہاں ہر دو لا اور جم لا کا تکمل معلوم ہو سکتا ہے، لیکن ہم فرض کرتے ہیں و = لا

چونکہ وَ = ۱، پس

$$\int \text{لا جم لا فرلا} = \text{لا جب لا} - \int \text{۱} \times \text{جب لا فرلا}$$
$$= \text{لا جب لا} + \text{جم لا}$$

مثال ۲۔ $\int \text{لا}^{\text{۲}}\, \text{جم لا فرلا}$ معلوم کرو

یہاں بھی ہم فرض کرتے ہیں و = لا²، چونکہ وَ = ۲ لا، نیا تکمل پرانے سے زیادہ سہل ہوگا

$$\int \text{لا}^{\text{۲}}\, \text{جم لا فرلا} = \text{لا}^{\text{۲}}\, \text{جب لا} - \int \text{۲ لا جب لا فرلا}$$

مسئلہ پھر استعمال ہو سکتا ہے

$$\int \text{۲ لا جب لا فرلا} = \text{۲ لا} (-\text{جم لا}) - \int \text{۲} (-\text{جم لا})\, \text{فرلا}$$
$$= -\text{۲ لا جم لا} + \text{۲} \int \text{جم لا فرلا}$$
$$= -\text{۲ لا جم لا} + \text{۲ جب لا}$$

اس لئے $\int \text{لا}^{\text{۲}}\, \text{جم لا فرلا} = \text{لا}^{\text{۲}}\, \text{جب لا} + \text{۲ لا جم لا} - \text{۲ جب لا} + \text{س}$

مثال ۳۔ $\int \text{قو}^{\text{لا}}\, \text{جم (ب لا + ج) فرلا}$ اور $\int \text{قو}^{\text{لا}}\, \text{جب (ب لا + ج) فرلا}$ معلوم کرو

ایک تکملہ کے دریافت کرنے کے عمل میں ہم دوسرے تکملہ کو بھی معلوم کر لیتے ہیں۔

فرض کرو کہ

ف = ∫ و^ا لا جم (ب لا + ج) فرلا ، ق = ∫ و^ا لا جب (ب لا + ج) فرلا

اس صورت میں ہم و کو کسی ایک جزو ضربی کے مساوی لے سکتے ہیں

ف = (و^ا لا / ا) جم (ب لا + ج) − ∫ (و^ا لا / ا) × [− ب جب (ب لا + ج)] فرلا

= و^ا لا جم (ب لا + ج) / ا + (ب / ا) ∫ و^ا لا جب (ب لا + ج) فرلا ۔

= و^ا لا جم (ب لا + ج) / ا + (ب / ا) ق

اس لئے اف − ب ق = و^ا لا جم (ب لا + ج) .... (۱)

اسی طرح ق پر عمل کرنے سے حاصل ہوگا

ب ف + اق = و^ا لا جب (ب لا + ج) .... (۲)

(۱) اور (۲) کو ف، ق کے لئے حل کرنے سے

ف = ∫ و^ا لا جم (ب لا + ج) فرلا = و^ا لا [ا جم (ب لا + ج) + ب جب (ب لا + ج)] / (ا² + ب²)

ق = ∫ و^ا لا جب (ب لا + ج) فرلا = و^ا لا [ا جب (ب لا + ج) − ب جم (ب لا + ج)] / (ا² + ب²)

یہ دو تکملے ریاضی طبیعیات میں خاص اہمیت رکھتے ہیں ۔

مثال (۴) ∫ √(ا² − لا²) فرلا اور ∫ √(لا² ± ا²) فرلا معلوم کرو

یہاں تکمل میں صرف ایک جزو ضربی ہے، لیکن ہم اکائی کو دوسرا جزو ضربی قرار دیکر اسے ع کے مساوی رکھ سکتے ہیں، فرض کرو کہ ع = ۱

اسلئے ∫ √(ا² − لا²) فرلا = لا √(ا² − لا²) − ∫ لا × (− لا / √(ا² − لا²)) فرلا

= لا √(ا² − لا²) − ∫ (− لا² / √(ا² − لا²)) فرلا ..... (۱)

اب ہم لکھتے ہیں $\frac{-\text{لا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} = \frac{(\text{ا}^2-\text{لا}^2)-\text{ا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}$

$$= \sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} - \frac{\text{ا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}$$

اس میں بائیں جانب کی پہلی رقم خود دیا ہوا تکمل ہے اور دوسری رقم کا تکملہ $\text{ا}^2 \text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ ہے (۱) میں درج کرو اور تکملہ کو دائیں طرف لے آؤ، ۲ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا

$$\int\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \frac{1}{2}\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} + \frac{1}{2}\text{ا}^2\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$$

یہی نتیجہ دفعہ ۷ مثال (۱) میں حاصل کیا گیا تھا۔

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\int\sqrt{\text{لا}^2\pm\text{ا}^2}\ \text{فرلا} = \frac{1}{2}\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2\pm\text{ا}^2} \pm \frac{1}{2}\text{ا}^2\,\text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2\pm\text{ا}^2}\right)$$

مقابلہ کرو دفعہ ۷ مثال ۲ کے ساتھ۔

اوپر کی جبروی تحویل اکثر کارآمد ثابت ہوتی ہے، اسی طرح کی تحویل مثلثی تفاعلوں کو تکمل کرنے میں استعمال کی جاتی ہے، (دفعہ ۱۰، مثال ۲، ۳)

جملہ درجہ دوم $\sqrt{\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج}}$ کو مثل دفعہ ۶ تحویل کرنے اور $\text{لا}+\text{ا}=\text{ع}$ رکھنے سے ہم تکمل کر سکتے ہیں۔

مثال ۵ — $\int \text{لوک}\,\text{لا}\ \text{فرلا}$ معلوم کرو

$$\int \text{لوک}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \text{لا}\,\text{لوک}\,\text{لا} - \int \text{لا}\,\frac{1}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لا}\,\text{لوک}\,\text{لا} - \text{لا}$$

۱۰ — متواتر تحویل۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا}$، تکمل بالحصص سے

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}} - \int \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{لا}} - \text{ن}\int \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{فرلا}$$

یعنی $ع_{ن} = لا^{ن} و^{لا} - ن\ ع_{ن-۱}$

ن کی بجائے ن-۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ع_{ن-۱} = لا^{ن-۱} و^{لا} - (ن-۱)\ ع_{ن-۲}$$

$$\text{پس}\quad ع_{ن} = لا^{ن} و^{لا} - ن\ لا^{ن-۱} و^{لا} + ن(ن-۱)\ ع_{ن-۲}$$

اسی طرح عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو تکمل $ع_{ن}$ بالآخر ج یعنی $\int و^{لا} فرلا$ پر یا $و^{لا}$ پر آکے منحصر ہوتا ہے۔ اگر ن مثبت صحیح عدد نہ ہو لیکن مثبت ہو تو $ع_{ن}$ ایک ایسے تکملہ پر آکے منحصر ہوتا ہے جس میں لا کا قوت نما مثبت کسر واجب ہے۔ اس صورت میں تکملہ معلومہ تفاعلوں کے ذریعہ محدود رقوم میں بیان نہیں ہو سکتا لیکن آئندہ تحقیق کے لئے نہایت موزوں شکل میں آجاتا ہے۔

تکمل کے مندرجہ بالا طریقہ کو جس میں ایک تکملہ اسی قسم کے ایک اور تکملہ پر لا کے منحصر کیا جاتا ہے **متواتر تحویل** کا طریقہ کہتے ہیں۔

$لا^{ن}$ جب لا، $لا^{ن}$ جم لا کے تکملوں پر اسی طرح کا عمل ہو سکتا ہے۔

مثال ۲۔ $ع_{ن} = \int جب^{ن} لا\ فرلا$

$$ع_{ن} = \int جب^{ن} لا\ فرلا = \int جب^{ن-۱} لا \times جب\ لا\ فرلا$$

$$= جب^{ن-۱} لا(-جم\ لا) - \int (ن-۱) جب^{ن-۲} لا\ جم\ لا(-جم\ لا)\ فرلا$$

$$= -جب^{ن-۱} لا\ جم\ لا + (ن-۱)\int جب^{ن-۲} لا\ جم^{۲} لا\ فرلا$$

اب $جم^{۲} لا = ۱ - جب^{۲} لا$ ک $جب^{ن-۲} لا\ جم^{۲} لا = جب^{ن-۲} لا - جب^{ن} لا$

$$\text{اسلئے}\quad ع_{ن} = -جب^{ن-۱} لا\ جم\ لا + (ن-۱)\ ع_{ن-۲} - (ن-۱)\ ع_{ن}$$

پس $\text{ع}_{\text{ن}} = -\frac{\text{جب}^{\text{ن}-1}\text{لا جم لا}}{\text{ن}} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{ن}-2}$ ...... (۱)

قوت نما ن بقدر ۲ کے کم ہو گیا ہے، ن کی بجائے ن - ۲ لکھنے سے

$$\text{ع}_{\text{ن}-2} = -\frac{\text{جب}^{\text{ن}-3}\text{لا جم لا}}{\text{ن}-2} + \frac{\text{ن}-3}{\text{ن}-2}\,\text{ع}_{\text{ن}-4}$$

پس $\text{ع}_{\text{ن}} = -\frac{\text{جب}^{\text{ن}-1}\text{لا جم لا}}{\text{ن}} - \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\,\frac{\text{جب}^{\text{ن}-3}\text{لا جم لا}}{\text{ن}-2} + \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)}{\text{ن}(\text{ن}-2)}\,\text{ع}_{\text{ن}-4}$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اسی طرح تحویل کو جاری رکھنے سے ہم قوت نما کو ایک بنا سکتے جبکہ ن طاق ہو اور صفر بنا سکتے ہیں جبکہ ن جفت ہو۔

$$\text{ع}_1 = \int \text{جب لا فرلا} = -\text{جم لا} \quad \text{اور} \quad \text{ع}_0 = \int \text{جب}^0\text{لا فرلا} = \text{لا}$$

اگر ن مثبت ہے لیکن صحیح عدد نہیں ہے تو $\text{ع}_{\text{ن}}$ کو یہاں تک تحویل کیا جا سکتا ہے کہ قوت نما ن مثبت یا منفی کسر واجب ہو جائے۔ ن کی منفی قیمتوں کے لئے دیکھو مثال ۴۔

ضابطہ (۱) کی نہایت کارآمد صورت اُس وقت پیدا ہوتی ہے جبکہ تکملہ کو حدود صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان لیا جائے، اِس صورت میں (۱) ہو جاتا ہے

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا فرلا} = \left[\text{ع}_{\text{ن}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{\text{جب}^{\text{ن}-1}\text{لا جم لا}}{\text{ن}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\left[\text{ع}_{\text{ن}-2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}-2}\text{لا فرلا}$$

چونکہ دوسری رقم دونوں حدود پر صفر ہوتی ہے۔

جس صورت میں ن طاق ہو $\text{ع}_{\text{ن}}$ کی آخری رقم ہوگی

$$\frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\ldots 4\times 2}{\text{ن}(\text{ن}-2)\ldots 5\times 3}\,(-\text{جم لا})$$

اور جس صورت میں ن جفت ہو آخری رقم ہوگی

$$\frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۵)\ldots\ldots ۳\times۱}{\text{ن}(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۴)\ldots\ldots ۴\times۲}\ \text{لا}$$

پس
$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا فرلا} = \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)\ldots\ldots ۴\times۲}{\text{ن}(\text{ن}-۲)\ldots\ldots ۵\times۳}\times ۱\ (\text{ن طاق صحیح عدد})$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا فرلا} = \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)\ldots\ldots ۳\times۱}{\text{ن}(\text{ن}-۲)\ldots\ldots ۴\times۲}\times \frac{\pi}{۲}\ (\text{ن جفت صحیح عدد})$$

اگر
$$\text{و}_{\text{ن}} = \int \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا فرلا}$$

تو
$$\text{و}_{\text{ن}} = \frac{\text{جم}^{\text{ن}-۱}\text{لا جب لا}}{\text{ن}} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}}\ \text{و}_{\text{ن}-۲}$$

ضابطہ سے ثابت کرنا آسان ہے یا بلاواسطہ محدود تکملہ کے مفہوم سے ظاہر ہے کہ

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا فرلا} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا فرلا}$$

جب$^{\text{ن}}$ لا اور جم$^{\text{ن}}$ لا کی ترسیموں کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ

$$\int_{۰}^{\pi} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا فرلا} = ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{لا فرلا}$$

$$\int_{۰}^{\pi} \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا فرلا} = ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{لا فرلا}\ [\text{جبکہ ن جفت صحیح عدد ہو}]$$

$$= ۰\ [\text{جبکہ ن طاق صحیح عدد ہو}]$$

اسی طرح نتائج ذیل یا اسی طرح کے اور نتائج بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

$$\int_{۰}^{۲\pi} \text{جب}^{۳}\text{لا فرلا} = ۰،\quad \int_{۰}^{۲\pi} \text{جم}^{۶}\text{لا فرلا} = ۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۶}\text{لا فرلا}$$

نیز ملاحظہ ہو قاعدہ جو مثال ۳ میں دیا گیا ہے۔

مثال ۳۔
$$\text{ف}(\text{م}،\text{ن}) = \int \text{جب}^{\text{م}}\text{لا جم}^{\text{ن}}\text{لا فرلا}$$

ملاحظہ ہو کہ ف (م، ن) میں پہلا حرف جیب ﻻ کا قوت نما ہے اور دوسرا جم ﻻ کا۔
اختصار کی خاطر جیب ﻻ کو س سے اور جم ﻻ کو ص سے تعبیر کرو۔ تب

$$ف(م، ن) = \int س^{م} ص^{ن} \, وﻻ = \int س^{م} ص \times ص^{ن-۱} \, وﻻ$$

چونکہ ص مشتق ہے س کا، $س^{م} ص$ کا تکملہ $\frac{س^{م+۱}}{م+۱}$ ہے، پس

$$ف(م، ن) = ص^{ن-۱} \frac{س^{م+۱}}{م+۱} + \frac{ن-۱}{م+۱} \int س^{م+۲} ص^{ن-۲} \, وﻻ \quad ....(۱)$$

لیکن $س^{م+۲} ص^{ن-۲} = س^{م} (۱ - ص^{۲}) ص^{ن-۲} = س^{م} ص^{ن-۲} - س^{م} ص^{ن}$

اس جملہ میں پہلی رقم ف (م، ن - ۲) کا تکمل ہے اور دوسری ف (م، ن) کا۔
(۱) میں مندرج کرو، ف (م، ن) کو دائیں جانب لے جاؤ اور $\frac{م+۱}{م+ن}$ سے
ضرب دو، اس طرح حاصل ہوگا

$$ف(م، ن) = \frac{س^{م+۱} ص^{ن-۱}}{م+ن} + \frac{ن-۱}{م+ن} ف(م، ن-۲) \quad ......(ا)$$

پس معلومہ تکملہ ایک اور ایسے تکملہ کے حل پر موقوف ہوتا ہے جس میں قوت نما م وہی رہتا ہے لیکن دوسرا قوت نما بقدر ۲ کے کم ہو جاتا ہے۔
اگر ہم تکمل کو اس طرح $س^{م-۱} \times س ص^{ن}$ لکھتے اور جیب التمام کو تکمل کرتے

تو ہمیں یہ ملتا $ف(م، ن) = -\frac{س^{م-۱} ص^{ن+۱}}{م+ن} + \frac{م-۱}{م+ن} ف(م-۲، ن) \quad ...(ب)$

اس میں م بقدر ۲ کے کم ہو گیا ہے اور ن نہیں بدلا۔
اب ہم تحویل کو اس صورت میں جاری رکھینگے جبکہ م، ن مثبت صحیح عدد ہوں اور اس طرح محدود تکملہ کی قیمت صفر سے $\frac{\pi}{۲}$ تک معلوم کرینگے۔
اگر ن طاق ہو تو (ا) سے ف (م، ن) تکملہ ف (م، ۱) پر منحصر ہوتا ہے،
(ب) کے ذریعہ ف (م، ۱) تکملہ ف (۱، ۱) پر منحصر ہوتا ہے اگر م طاق ہو اور

ف (۰، ۱) پر اگر م جفت ہو۔

اگر ن جفت ہو تو (۱) سے ف (م، ن) تکملہ ف (م، ۰) پر موقوف ہوتا ہے، لیکن ف (م، ۰) مثال ۲ کا تکملہ ہے جبکہ ن کی بجائے م لکھا جائے، پس مثال ۲ (۱) سے، ف (م، ۰) تکملہ ف (۱، ۰) پر منحصر ہوتا ہے اگر م طاق ہو اور ف (۰، ۰) پر منحصر ہوتا ہے اگر م جفت ہو۔

پس ف (م، ن) تحویل کے بعد ذیل کے چار تکملوں میں سے کسی ایک پر موقوف ہو سکتا ہے۔

$$\text{ف}(۱،۱) = \int \text{س ص فرلا} = \tfrac{۱}{۲}\,\text{جب}^{۲}\text{لا}، \quad \text{ف}(۰،۱) = \int \text{ص فرلا} = \text{جب لا}$$

$$\text{ف}(۱،۰) = \int \text{س فرلا} = -\text{جم لا}، \quad \text{ف}(۰،۰) = \int ۱\ \text{فرلا} = \text{لا}$$

اگر تکملہ کو حدود صفر اور $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان محسوب کیا جائے تو مندرجہ بالا چار تکملوں کی قیمتیں بالترتیب ہوتی ہیں $\frac{۱}{۲}$، ۱، ۱، $\frac{\pi}{۲}$

طالب علم اب ثابت کرے کہ ذیل کا قاعدہ درست ہے

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{م}}\text{لا جم}^{\text{ن}}\text{لا فرلا} = \frac{(\text{م}-۱)(\text{م}-۳)(\text{م}-۵)\ldots\ldots(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۵)\ldots}{(\text{م}+\text{ن})(\text{م}+\text{ن}-۲)(\text{م}+\text{ن}-۴)\ldots\ldots} \times \text{عما}$$

جہاں عما = ۱ سوائے اس صورت کے جبکہ م اور ن دونوں جفت صحیح عدد ہیں، موخرالذکر صورت میں عما = $\frac{\pi}{۲}$، مخفی نہ رہے کہ اوپر اور نیچے کے تینوں سلسلوں کے اجزائے ضربی کو اس حد تک جاری رکھنا چاہئے جب تک کہ مثبت رہیں۔ یہ بھی دیکھا جائے کہ ہر سلسلہ کے اجزا بقدر ۲ کے کم ہوتے ہیں۔ اس قاعدہ میں مثال ۲ کے تکملے بھی شامل ہیں جو م (یا ن) کو صفر بنانے اور منفی اجزائے ضربی کو حذف کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۲}\text{لا جم}^{۴}\text{لا فرلا} = \frac{۱\times۳\times۱}{۲\times۴\times۶} \times \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۳۲}$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۴}\text{لا جم}^{۶}\text{لا فرلا} = \frac{۱\times۳\times۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶\times۸\times۱۰} \times \frac{\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۵۱۲}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{5} \text{لا} \, \text{جم}^{5} \text{لا} \, \text{فرلا} = \frac{2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 6}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12} \times 1 = \frac{1}{120}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{8} \text{لا} \, \text{فرلا} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} \times \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256}$$

امثلہ ۲ اور ۳ کی خاص اہمیت اس وجہ سے ہے کہ کئی تکملے مناسب ابدال کے بعد اس شکل میں لائے جا سکتے ہیں، مثلاً اگر ہم ذیل کے تکملہ میں رکھیں لا = ا جب طہ جس سے

طہ = ۰ جبکہ لا = ۰ اور طہ = $\frac{\pi}{2}$ جبکہ لا = ا تو حاصل ہوتا ہے

$$\int_{0}^{1} \text{لا}^{2} (\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})^{\frac{3}{2}} \text{فرلا} = \text{ا}^{6} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{2} \text{طہ} \, \text{جم}^{4} \text{طہ} \, \text{فرطہ} = \text{ا}^{6} \frac{1 \times 3 \times 1}{2 \times 4 \times 6} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32} \text{ا}^{6}$$

اگر ہم رکھیں لا = ا جب^{2} طہ ذیل کے سوال میں تو

$$\int_{0}^{1} \text{لا}^{2} (\text{ا} - \text{لا})^{\frac{3}{2}} \text{فرلا} = 2 \text{ا}^{\frac{9}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{5} \text{طہ} \, \text{جم}^{4} \text{طہ} \, \text{فرطہ} = 2 \text{ا}^{\frac{9}{2}} \frac{1 \times 3 \times 2 \times 4}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9}$$

$$= \frac{16}{315} \text{ا}^{\frac{9}{2}}$$

مثال ۴۔ اگر ن منفی ہو تو ع$_{\text{ن}-2}$ میں قوت کا تعداد ن سے بڑا ہوگا۔

مثال ۲ (۱) میں فرض کرو کہ ن = -م جہاں م مثبت ہے، تب

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{س}^{\text{م}}} = \frac{\text{ص}}{\text{م} \, \text{س}^{\text{م}+1}} + \frac{\text{م}+1}{\text{م}} \int \frac{\text{فرلا}}{\text{س}^{\text{م}+2}}$$

اس لئے
$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{س}^{\text{م}+2}} = -\frac{\text{ص}}{(\text{م}+1) \, \text{س}^{\text{م}+1}} + \frac{\text{م}}{\text{م}+1} \int \frac{\text{فرلا}}{\text{س}^{\text{م}}}$$

اب رکھو م + ۲ = ن جہاں ن مثبت ہے، اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{\text{ن}} \text{لا}} = -\frac{\text{جم} \, \text{لا}}{(\text{ن}-1) \, \text{جب}^{\text{ن}-1} \text{لا}} + \frac{\text{ن}-2}{\text{ن}-1} \int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{\text{ن}-2} \text{لا}}$$

کئی صورتوں میں تکمل کا عمل ذیل کی تحویل سے آسان ہو جائیگا۔

$$\frac{1}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}} = \frac{\text{جب}^{2}\text{لا} + \text{جم}^{2}\text{لا}}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}} = \frac{1}{\text{جب}^{\text{ن}-2}\,\text{لا}} + \frac{\text{جم}\,\text{لا}}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}} \times \text{جم}\,\text{لا}$$

لیکن ایسے تکملے ابتدائی حسابات میں چنداں ضروری نہیں۔ ایسی تحویلوں کا خاص منشا یہ ہے کہ ایک دفعہ تکمل بالحصص کا عمل کرنے کے بعد نیا قوت نما پرانے کی نسبت بقدر ۲ کے متفاوت ہو جائے کہ جب قوت نما منفی ہو تو اس میں زیادہ سہولت ہوتی ہے کہ متکمل کے قوت نما کو کم کر کے اس پر عمل تکمل کیا جائے۔

مثال ۵۔ $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{مس}^{\text{ن}}\,\text{لا}\;\text{فرلا}$

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{مس}^{\text{ن}-2}\text{لا}\,(\text{قط}^{2}\text{لا} - 1)\,\text{فرلا} = \int \text{مس}^{\text{ن}-2}\text{لا}\;\text{قط}^{2}\text{لا}\;\text{فرلا} - \text{ع}_{\text{ن}-2}$$

$$\text{پس}\quad \text{ع}_{\text{ن}} = \frac{\text{مس}^{\text{ن}-1}\,\text{لا}}{\text{ن}-1} - \text{ع}_{\text{ن}-2}$$

تحویلی ضابطوں کی اور مثالیں مشقوں میں دی گئی ہیں لیکن کئی صورتوں میں مثلثی ابدال سے اکثر تکملے اوپر کی کسی نہ کسی ایک شکل میں لائے جا سکیں گے۔

مشق ۳

امثلہ ۱ تا ۲۴ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو

۱۔ $\text{لا}\;\text{قو}^{\text{لا}}$　　۲۔ $\text{لا}^{3}\,\text{قو}^{\text{لا}}$　　۳۔ $\text{لا}\;\text{جب}\,\text{لا}$

۴۔ $\text{لا}\;\text{جم}\,\text{لا}$　　۵۔ $\text{لا}\;\text{جب}\,\text{لا}\;\text{جم}\,\text{لا}$　　۶۔ $\text{لا}^{2}\,\text{جب}\,\text{لا}$

۷۔ $\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{لوک}\,\text{لا}\quad(\text{ن} \neq -1)$　　۸۔ $\frac{1}{\text{لا}}\,\text{لوک}\,\text{لا}$

۹۔ $\text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{جب}^{2}\text{لا}$　　۱۰۔ $\frac{\text{لا}\;\text{قو}^{\text{لا}}}{(1+\text{لا})^{2}}$　　۱۱۔ $\text{لا}\;\text{قو}^{-\text{لا}^{2}}$

۱۲۔ $\text{جب}^{-1}\text{لا}$　　۱۳۔ $\text{مس}^{-1}\text{لا}$　　۱۴۔ $\text{لا}\;\text{جب}^{-1}\text{لا}$

۱۵۔ $\text{لا}\;\text{مس}^{-1}\text{لا}$　　۱۶۔ $\sqrt{3 + 2\text{لا} - \text{لا}^{2}}$

۱۷- $\sqrt{\text{۳+۲لا+لا}^2}$ ۱۸- $\sqrt{\text{۲ا لا - لا}^2}$ ۱۹- $\sqrt{\text{۲ا لا + لا}^2}$

۲۰- $\dfrac{\text{لا}^2}{\sqrt{\text{۱ - لا}^2}}$ ۲۱- $\dfrac{\text{لا + جب لا}}{\text{۱ + جم لا}}$

۲۲- $\text{قو}^{\text{-۳لا}}$ جم ۴لا ۲۳- جم ن لا جم لا ۲۴- جب ن لا جب لا

۲۵- ذیل کے تکملوں کو محسوب کرو

(۱) $\int_0^{\pi/2} \text{جم}^4 \text{لا فرلا}$ (۲) $\int_0^{\pi} \text{جب}^6 \text{لا فرلا}$

(۳) $\int_0^{\pi/2} \text{جب}^2\text{لا جم}^4\text{لا فرلا}$ (۴) $\int_0^{\pi} \text{جب}^3\text{لا جم}^4\text{لا فرلا}$

(۵) $\int_0^{\pi/4} \text{جب}^4\text{لا جم}^4\text{لا فرلا}$ (۶) $\int_0^{\pi/4} \text{سر}^6 \text{لا فرلا}$

۲۶- مثلثی ابدال سے ذیل کے تکملوں کی قیمتیں محسوب کرو

(۱) $\int_0^{\text{ا}} \text{لا}^2 \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا}$ (۲) $\int_0^{\text{۲ا}} \text{لا} \sqrt{\text{۲ا لا - لا}^2}\ \text{فرلا}$

(۳) $\int_0^{\text{۲ا}} \text{لا}^2 \sqrt{\text{۲ا لا - لا}^2}\ \text{فرلا}$

۲۷- $\int_0^{\text{ا}} \text{لا} \sqrt{\dfrac{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}}\ \text{فرلا}$ کو تکمل کرو۔ درج کرو $\text{لا}^2 = \text{ا}^2 \text{جم ۲ طہ}$

۲۸- اگر $\text{ف(م، ن)} = \int_0^1 \text{لا}^{\text{م}} (\text{۱-لا})^{\text{ن}}\ \text{فرلا}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف(م، ن)} = \frac{\text{لا}^{\text{م+۱}}(\text{۱-لا})^{\text{ن}}}{\text{م+ن+۱}} + \frac{\text{ن}}{\text{م+ن+۱}}\ \text{ف(م، ن-۱)}$$

اس طرح ابدال $\text{لا} = \text{جب}^2 \text{طہ}$ سے تکملہ

$$\int_0^1 \text{لا}^{\text{م}} (\text{۱-لا})^{\text{ن}}\ \text{فرلا}$$

کی قیمت معلوم کرو جہاں م، ن دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

۲۹۔ اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^2 + \text{لا}^2)^{\text{ن}}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{\text{لا}}{(2\text{ن}-2)\,\text{ا}^2(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\text{ن}-1}} + \frac{2\text{ن}-3}{(2\text{ن}-2)\,\text{ا}^2}\,\text{ع}_{\text{ن}-1}$$

۳۰۔ اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}} \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع}_{\text{ن}} = -\frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}(\text{ا}^2-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{ن}+2} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}+2}\,\text{ا}^2\,\text{ع}_{\text{ن}-2}$$

۳۱۔ اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}} \sqrt{2\text{الا} - \text{لا}^2}\ \text{فرلا}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع}_{\text{ن}} = -\frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}(2\text{الا}-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{ن}+2} + \frac{2\text{ن}+1}{\text{ن}+2}\,\text{ا}\,\text{ع}_{\text{ن}-1}$$

لکھو $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}-1}\{\text{ا} - (\text{ا}-\text{لا})\}\,\text{ر}^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا} = \text{ا}\,\text{ع}_{\text{ن}-1} - \frac{1}{2}\int \text{لا}^{\text{ن}-1}\frac{\text{فر ر}}{\text{فرلا}}\,\text{ر}^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}$

جہاں $\text{ر} = 2\text{الا} - \text{لا}^2$ اور پھر حصوں سے تکمل کرو۔

۳۲۔ اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \frac{\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فرلا}}{\sqrt{2\text{الا}-\text{لا}^2}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع}_{\text{ن}} = -\frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}\sqrt{2\text{الا}-\text{لا}^2}}{\text{ن}} + \frac{2\text{ن}-1}{\text{ن}}\,\text{ا}\,\text{ع}_{\text{ن}-1}$$

۳۳۔ اگر م، ن مثبت صحیح عدد ہوں تو تکملہ

$$\int_0^1 (1 - \text{لا}^{\frac{1}{\text{ن}}})^{\text{م}}\,\text{فرلا}$$

کی قیمت دریافت کرو۔

۳۴۔ مفصلہ ذیل کی قیمتیں معلوم کرو

(۱) $\int_{0}^{\text{ا}} \text{لا}^{4} \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا}$ (۲) $\int_{0}^{2\text{ا}} \text{لا}^{4} \sqrt{2\text{الا} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا}$

۳۵۔ زائد $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ پر ایک نقطہ ن (ضا، عا) ہے، اس کا فصلہ و م اور معین م ن ہے اور ضا، عا دونوں مثبت ہیں، اگر ن کے قریب کا راس ا ہو تو ثابت کرو کہ رقبہ ا م ن

$$= \frac{1}{2}\,\text{ضا عا} - \frac{1}{2}\,\text{اب لوک}\left(\frac{\text{ضا}}{\text{ا}} + \frac{\text{عا}}{\text{ب}}\right)$$

اور قطاع و ا ن کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{اب لوک}\left(\frac{\text{ضا}}{\text{ا}} + \frac{\text{عا}}{\text{ب}}\right)$$

۳۶۔ منحنی $\text{ما}^{2} = (\text{لا} - 1)(\text{لا} - 3)^{2}$ کو مرتسم کرو اور اس کے بند حلقے کا رقبہ دریافت کرو۔

۳۷۔ منحنی $\text{ا}^{2}\text{ما}^{2} = \text{لا}^{3}(2\text{ا} - \text{لا})$ کو مرتسم کرو جہاں ا مثبت ہے اور تمام رقبہ جو اس سے گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو۔

۳۸۔ زنجیرہ $\text{ما} = \frac{1}{2}\,\text{ا}\left(\text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} + \text{قو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right)$ کی قوس کا طول معلوم کرو جبکہ قوس کو منحنی پر کے نقطہ ج سے ناپنا شروع کیا جائے جہاں لا = ۰ ثابت کرو کہ جو رقبہ دونوں محوروں، منحنی اور ن پر کے معین کے درمیان گھر جاتا ہے وہ قوس ج ن کا ا گنا ہے۔

۳۹۔ خط صنوبری (قلب نما) $\text{ر} = \text{ا}(1 - \text{جم طہ})$ کی قوس کا طول معلوم کرو جبکہ قوس کو مبدأ سے ناپا جائے۔

۴۰۔ لولبی $\text{ر} = \text{ا طہ}$ کی قوس کا طول معلوم کرو اس شرط کے ماتحت کہ اس = ۰ جبکہ ر = ۰

۴۱- ولبی ر = ۱ تو طا م عا کی قوس کا طول معلوم کرو

جبکہ س = ۰ اگر طا = ۰

۱۱- جزوی کسور- کسی منطق کسر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے طریقوں کے

متعلق یہ بحث جبر و مقابلہ کی اکثر کتب نصاب میں ملے گی، اس نظریہ کی مفصل بحث کے لئے طالب علم کرسٹل کے جبر و مقابلہ حصہ اول، باب ہشتم کی طرف رجوع کرے یہاں ہم صرف چند مثالیں حل کر دینگے - مجوزہ کسر کو کسر واجب فرض کیا جائیگا یعنی یہ فرض کیا جائیگا کہ اس کے شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ کی نسبت کم ہے، نیز یہ بھی فرض کیا جائیگا کہ کسر مفرد ترین رقوم میں بیان کر لی گئی ہے۔

فرض کرو کہ مجوزہ کسر فا(لا) / ف(لا) ہے جہاں فا(لا) اور ف(لا)، لا کے منطق صحیح تفاعل ہیں۔ ف(لا) کو حقیقی مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں تحلیل کر لیا جا سکتا ہے جہاں ہر ایک جزو ضربی لا کا خطی تفاعل ہو یا دو درجی لیکن خواہ یہ خطی ہو یا دو درجی یہ اس حاصل ضرب میں کئی مرتبہ تکرار پا سکتا ہے۔

فا(لا) / ف(لا) کو جزوی کسور کے مجموعہ میں ایک اور صرف ایک طرح تحلیل کر سکتے ہیں، یہ جزوی کسریں ذیل کے نمونوں پر مشتمل ہونگی۔

(۱) ف(لا) کے ہر ایسے خطی جزو ضربی لا - عا کے مماثل جو تکرار نہیں پاتا جزوی کسر اس شکل ۱ / (لا - عا) کی ہوگی۔

(۲) ف(لا) کے ہر ایسے خطی جزو ضربی (لا - با) کے مماثل جو ر مرتبہ تکرار پاتا ہے ر جزوی کسریں ذیل کی شکلوں پر مشتمل ہونگی

کا_ر / (لا - با)^ر + کا_{ر-۱} / (لا - با)^{ر-۱} + ... + کا_۲ / (لا - با)^۲ + کا_۱ / (لا - با)

(۳) ف(لا) کے ہر ایسے ثنائی جزو ضربی لا^۲ + جا لا + ہا کے مماثل جو تکرار

نہیں پاتا جزوی کسر اس شکل $\frac{\text{ج لا} + \text{د}}{\text{لا}^2 + \text{جہ لا} + \text{لہ}}$ کی ہوگی۔

(۳) ف (لا) کے ہر ایسے ثنائی جزو ضربی ($\text{لا}^2 + \text{جہ لا} + \text{لہ}$) کے مماثل جو ر مرتبہ تکرار پاتا ہے، جزوی کسریں ذیل کی شکلوں پر مشتمل ہونگی

$$\frac{\text{ج لا} + \text{د}}{(\text{لا}^2 + \text{جہ لا} + \text{لہ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{ج}_{\text{ر}-1}\,\text{لا} + \text{د}_{\text{ر}-1}}{(\text{لا}^2 + \text{جہ لا} + \text{لہ})^{\text{ر}-1}} + \ldots + \frac{\text{ج}_1\,\text{لا} + \text{د}_1}{\text{لا}^2 + \text{جہ لا} + \text{لہ}}$$

یہاں ا، ب، ج ... وغیرہ کے دریافت کرنے کا طریقہ ذیل کی مثالوں سے معلوم ہوگا۔

مثال ۱۔ $\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}^2-1)(\text{لا}-2)}$، نسب نما میں کوئی جزو ضربی تکرار نہیں پاتا، اسلئے

$$\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}+1)(\text{لا}-1)(\text{لا}-2)} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}+1} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}-1} + \frac{\text{ج}}{\text{لا}-2}$$

کسروں سے خالی کرو۔ اس طرح

$$\text{لا}^2 = \text{ا}(\text{لا}-1)(\text{لا}-2) + \text{ب}(\text{لا}+1)(\text{لا}-2) + \text{ج}(\text{لا}+1)(\text{لا}-1)$$

یہ مساوات متطابقہ ہے، یہ لا کی ہر ایسی قیمت کے لئے پوری ہوگی جسے ہم مساوات میں درج کریں۔ رکھو $\text{لا}+1=0$ یعنی $\text{لا}=-1$، اس طرح ب اور ج والی رقمیں صفر ہو جاتی ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$1 = \text{ا}(-1-1)(-1-2) \quad \text{یا} \quad \text{ا} = \frac{1}{6}$$

اسی طرح رکھو $\text{لا}=1$، اس سے $\text{ب} = -\frac{1}{2}$ اور رکھو $\text{لا}=2$ تو $\text{ج} = \frac{4}{3}$ اور

$$\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}^2-1)(\text{لا}-2)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\text{لا}+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\text{لا}-1} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\text{لا}-2}$$

یا ا معلوم کرنے کے لئے اس کے نسب نما کے ساتھ دونوں طرف ضرب دے جاؤ اور پھر رکھو $\text{لا}+1=0$، اس طرح

$$\text{ا} = \left[\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}-1)(\text{لا}-2)}\right]_{\text{لا}=1} = -1$$

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر (لا ـ عہ)، ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہو جو تکرار نہیں پاتا اور اسکے مماثل جزوی کسر $\frac{\text{ا}}{\text{لا}-\text{عہ}}$ ہو تو

$$\text{ا} = \left[\frac{\text{فا}(\text{لا})(\text{لا}-\text{عہ})}{\text{ف}(\text{لا})}\right]_{\text{لا}=\text{عہ}}$$

اگر $\text{ف}(\text{لا}) = (\text{لا}-\text{عہ})\,\text{فہ}(\text{لا})$

$$\text{ف}'(\text{لا}) = \text{فہ}(\text{لا}) + (\text{لا}-\text{عہ})\,\text{فہ}'(\text{لا}),\quad \text{ف}'(\text{عہ}) = \text{فہ}(\text{عہ})$$

$$\text{پس}\quad \text{ا} = \left[\frac{(\text{لا}-\text{عہ})\,\text{فا}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{عہ})\,\text{فہ}(\text{لا})}\right]_{\text{لا}=\text{عہ}} = \frac{\text{فا}(\text{عہ})}{\text{فہ}(\text{عہ})} = \frac{\text{فا}(\text{عہ})}{\text{ف}'(\text{عہ})}$$

مثال ۲۔ $\frac{\text{لا}^2+\text{لا}+2}{(\text{لا}-1)^2(\text{لا}^2-\text{لا}+1)}$، مکرر جزو ضربی $(\text{لا}-1)^2$ کے مماثل دو جزوی کسریں ہونگی اور چونکہ $\text{لا}^2-\text{لا}+1$ کے دو حقیقی جزو ضربی نہیں حاصل ہو سکتے اِس لئے اس کے مماثل نمونہ (۳) کی کسر ہوگی۔ پس

$$\frac{\text{لا}^2+\text{لا}+2}{(\text{لا}-1)^2(\text{لا}^2-\text{لا}+1)} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا}-1)^2} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}-1} + \frac{\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}$$

کسروں سے خالی کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{لا}^2+\text{لا}+2 = \text{ا}(\text{لا}^2-\text{لا}+1) + \text{ب}(\text{لا}-1)(\text{لا}^2-\text{لا}+1) + (\text{ج}\,\text{لا}+\text{د})(\text{لا}-1)^2$$

رکھو لا = ۱، حاصل ہوتا ہے ا = ۴، ا والی رقم کو دائیں جانب لاؤ اور ا کو ۴ کے مساوی کہنے سے تحویل کرو۔ اب بائیں جانب (لا ـ ۱) جزو ضربی ہے اور چونکہ یہ مساوات متطابقہ ہے اسلئے (لا ـ ۱) دائیں جانب کے تحویل شدہ جملہ کا جزو ضربی ہونا چاہئے۔ اگر ایسا نہیں ہے تو عمل میں کوئی غلطی ہے۔ پس

$$-(3\text{لا}-2)(\text{لا}-1) = \text{ب}(\text{لا}-1)(\text{لا}^2-\text{لا}+1) + (\text{ج}\,\text{لا}+\text{د})(\text{لا}-1)^2$$

(لا ـ ۱) پر تقسیم کرو اور رکھو لا = ۱، اس طرح ب = ـ۱، اب ب والی رقم کو دائیں

جانب لے جاؤ اور پھر (لا - ۱) پر تقسیم کرو۔

تب لا - ۳ = ج لا + د

چونکہ یہ مساوات متطابقہ ہے اسلئے ج = ۱، د = -۳، اسلئے

$$\frac{\text{لا}^2+\text{لا}+2}{(\text{لا}-1)^2(\text{لا}^2-\text{لا}+1)}=\frac{4}{(\text{لا}-1)^2}-\frac{1}{\text{لا}-1}+\frac{\text{لا}-3}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}$$

مثال ۳- $\frac{\text{لا}^3-2}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2(\text{لا}^2+\text{لا}+1)}$، چونکہ نسب نما کے حقیقی اجزا نہیں ہیں، اسلئے نمونوں (۳) اور (۴) کی رو سے

$$\frac{\text{لا}^3-2}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2(\text{لا}^2+\text{لا}+1)}=\frac{\text{ا لا}+\text{ب}}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2}+\frac{\text{ج لا}+\text{د}}{\text{لا}^2+\text{لا}+2}+\frac{\text{ع لا}+\text{ف}}{\text{لا}^2+\text{لا}+1}$$

کسروں سے خالی کرنے سے $\text{لا}^3-2=(\text{ا لا}+\text{ب})(\text{لا}^2+\text{لا}+1)+(\text{ج لا}+\text{د})(\text{لا}^2+\text{لا}+2)(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$

$$+(\text{ع لا}+\text{ف})(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2$$

رکھو $\text{لا}^2+\text{لا}+2=0$، اور لا^2، لا^3 کو اس مساوات کے ذریعہ خطی تفاعلوں میں تحویل کرو۔

$\text{لا}^2+\text{لا}+1=-1$، $\text{لا}^2=-\text{لا}-2$، $\text{لا}^3=-\text{لا}^2-2\text{لا}=-\text{لا}+2$ اور اسلئے $-\text{لا}=-\text{ا لا}-\text{ب}$

جس سے ا = ۱، ب = ۰، اب ا اور ب والی رقم کو دائیں جانب لے جاؤ اور $\text{لا}^2+\text{لا}+2$ پر تقسیم کرو جسے لازماً جزو ضربی ہونا چاہیئے۔ اسلئے

$$-1=(\text{ج لا}+\text{د})(\text{لا}^2+\text{لا}+1)+(\text{ع لا}+\text{ف})(\text{لا}^2+\text{لا}+2)$$

رکھو $\text{لا}^2+\text{لا}+2=0$ اور پہلے کی طرح عمل کرو۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے ج = ۰، د = ۱

اسلئے $\text{لا}^2+\text{لا}+2$ پر تقسیم کرنے سے $-1=\text{ع لا}+\text{ف}$، ع = ۰، ف = -۱

اور کسر مجوزہ $=\frac{\text{لا}}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2}+\frac{1}{\text{لا}^2+\text{لا}+2}-\frac{1}{\text{لا}^2+\text{لا}+1}$

ان مثالوں سے سر ا، ب، ج وغیرہ معلوم کرنے کا طریقہ کافی طور پر واضح ہو گیا ہوگا نیز اور کئی طریقے طالب علم کو خود بخود سوجھینگے۔ جزوی کسور کے متعلق پوری بحث

کرسٹل کے جبر و مقابلہ میں ملیگی - اسکا حوالہ اوپر دیا گیا ہے -

۱۲- منطق تفاعلوں کا تکمل - اگر $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{ف(لا)}}$ کسر واجب نہ ہو تو عمل تقسیم سے اس کو ایک منطق صحیح تفاعل اور ایک منطق کسر واجب کے مجموعہ کے مساوی لکھا جا سکتا ہے -

منطق صحیح تفاعل کا تکملہ ایک منطق صحیح تفاعل ہوگا -

$\frac{\text{۱}}{(\text{لا}-\text{عا})}$ کا تکملہ ا لوک (لا - عا) ہے -

$\frac{\text{ب}}{(\text{لا}-\text{بہ})^{\text{ر}}}$ کا تکملہ جہاں ر ایک سے مختلف ہے $\frac{-\text{ب}}{(\text{ر}-\text{۱})(\text{لا}-\text{بہ})^{\text{ر}-\text{۱}}}$ ہے

$\frac{\text{ج لا}+\text{د}}{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{جہ لا}+\text{لہ}}$ کے تکملہ پر دفعہ ۶ میں بحث ہو چکی ہے۔ یہ اس شکل کا ہوگا

$$\text{لہ لوک}(\text{لا}^{\text{۲}}+\text{جہ لا}+\text{لہ})+\text{مہ مس}^{-\text{۱}}\frac{\text{۲ لا}+\text{جہ}}{\sqrt{\text{۴ لہ}-\text{جہ}^{\text{۲}}}}$$

اس لئے اب ہم صرف $\frac{\text{ج لا}+\text{د}}{(\text{لا}^{\text{۲}}+\text{جہ لا}+\text{لہ})^{\text{ر}}}$ پر غور کرینگے -

درجہ دوم کے جملہ کو اس شکل ر = (لا + عہ)$^{\text{۲}}$ + بہ$^{\text{۲}}$ میں لکھنے سے تکملہ ہوگا

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ج}\int\frac{\text{۲(لا}+\text{عہ) ذ لا}}{\text{ر}^{\text{ر}}}+(\text{د}-\text{عہ ج})\int\frac{\text{ذ لا}}{\text{ر}^{\text{ر}}}$$

$$=\frac{-\text{ج}}{\text{۲(ر}-\text{۱)ر}^{\text{ر}-\text{۱}}}+(\text{د}-\text{عہ ج})\int\frac{\text{ذ لا}}{\text{ر}^{\text{ر}}}$$

عملی طور پر یہ زیادہ آسان ہے کہ $\frac{\text{۱}}{\text{ر}^{\text{ر}}}$ کو ابدال لا + عہ = بہ مس ط سے تکمل کیا جائے لیکن نظری نقطہ نظر سے تحویلی ضابطہ حاصل کرنا موجب دلچسپی ہوگا -

اگر ہم $\frac{\text{لا}+\text{عہ}}{\text{ر}^{\text{ن}-1}}$ کو تفرق کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{لا}+\text{عہ}}{\text{ر}^{\text{ن}-1}}\right) = \frac{1}{\text{ر}^{\text{ن}-1}} - \frac{2(\text{ن}-1)(\text{لا}+\text{عہ})^2}{\text{ر}^{\text{ن}}}$$

$$= \frac{-(2\text{ن}-3)}{\text{ر}^{\text{ن}-1}} + \frac{2(\text{ن}-1)\text{بہ}^2}{\text{ر}^{\text{ن}}}$$

جہاں $(\text{لا}+\text{عہ})^2$ مساوی $\text{ر}-\text{بہ}^2$ کے لکھا گیا ہے۔
تکمل کرنے اور ترتیب بدلنے سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ر}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}+\text{عہ}}{2(\text{ن}-1)\text{بہ}^2\,\text{ر}^{\text{ن}-1}} + \frac{2\text{ن}-3}{2(\text{ن}-1)\text{بہ}^2}\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ر}^{\text{ن}-1}}$$

اسلئے $\frac{\text{ج لا}+\text{د}}{\text{ر}^{\text{ن}}}$ کا تکملہ $\frac{1}{\text{ر}}$ کے تکملہ پر جو مقلوب مثلثی تفاعل ہے منحصر ہوسکتا ہے۔

پس لا کے کسی منطق تفاعل کا تکملہ منطق تفاعلوں، لوکارثموں اور مقلوب مستدیر تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہوسکتا ہے۔

جزوی کسور کے طریقہ سے تکمل کرنے میں بہت محنت اور طول عمل ہوتا ہے، جزوی کسور میں تحلیل کرنے سے پہلے طالب علم کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ آیا تکملہ کسی طرح کے ابدال سے سادہ شکل میں لایا جاسکتا ہے یا نہیں۔

مثلاً $\int \frac{\text{لا}^3\,\text{فرلا}}{\text{لا}^4-\text{لا}^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{ع فرع}}{\text{ع}^2-\text{ع}+1}$ جہاں $\text{ع}=\text{لا}^2$

اور ع والی کسر کے ساتھ عمل کرنا لا والی کسر کی نسبت زیادہ آسان ہے۔

۱۳ — غیر منطق تفاعل ۔ اب ہم ایک دو ایسی صورتوں پر غور کرینگے جن میں متکمل غیر منطق تفاعل ہے۔

(۱) جب متکمل میں صرف لا کی کسور قوتیں شریک ہوں تو فرض کرو کہ ان کسروں کے

نسب نماؤں کا ذو اضعاف اقل ن ہے۔ پس اگر متکمل میں $لا = ع^{ن}$ لکھا جائے تو اس ابدال سے نیا متکمل ع میں منطق ہو جائیگا۔

پس اگر $لا = ع^{۶}$ تو

$$\int \frac{لا^{\frac{1}{2}}\, فرلا}{1 + لا^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{ع^{۳} \times ۶ ع^{۵}\, فرع}{1 + ع^{۲}} = ۶ \int \frac{ع^{۸}\, فرع}{1 + ع^{۲}}$$

$$= ۶ \int \left(ع^{۶} - ع^{۴} + ع^{۲} - ۱ + \frac{1}{ع^{۲} + ۱}\right) فرع$$

$$= ۶ \left(\frac{ع^{۷}}{۷} - \frac{ع^{۵}}{۵} + \frac{ع^{۳}}{۳} - ع + مس^{-1} ع\right)$$

$$= ۶ \left(\frac{1}{۷} لا^{\frac{۷}{۶}} - \frac{1}{۵} لا^{\frac{۵}{۶}} + \frac{1}{۳} لا^{\frac{1}{۲}} - لا^{\frac{1}{۶}} + مس^{-1} (لا^{\frac{1}{۶}})\right)$$

(۲) جب متکمل میں $\sqrt{ا لا + ب}$ شریک ہو لیکن کسی طرح کا اور اصم شامل نہ ہو تو ابدال $ا لا + ب = ع^{۲}$ سے نیا متکمل ع میں منطق ہو جائے گا۔

(۳) جب متکمل میں صرف $\sqrt{ا لا^{۲} + ب لا + ج}$ شریک ہو لیکن کسی طرح کا اور اصم شامل نہ ہو تو تکملہ ایک منطق تفاعل کے تکملہ میں اس طرح تحویل ہو سکتا ہے

صورت اول۔ فرض کرو کہ ا مثبت ہے۔ اصم کو اس شکل میں لکھو

$$\sqrt{ا} \sqrt{لا^{۲} + ف لا + ق}، \quad ف = \frac{ب}{ا}، \quad ق = \frac{ج}{ا}$$

فرض کرو کہ $\sqrt{لا^{۲} + ف لا + ق} = ع - لا$، پس مربع اٹھانے اور لا کے لئے حل کرنے سے

$$لا = \frac{ع^{۲} - ق}{۲ع + ف}، \quad \frac{فرلا}{فرع} = \frac{۲ع(۲ع + ف) - ۲(ع^{۲} - ق)}{(۲ع + ف)^{۲}}$$

$$= \frac{۲(ع^{۲} + فع + ق)}{(۲ع + ف)^{۲}}$$

نیا تکمل صریحاً ع میں منطق ہوگا۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ا منفی ہے، ما کے حقیقی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ $ا لا^2 + ب لا + ج$ کے خطی اجزائے ضربی حقیقی ہوں کیونکہ اگر یہ حقیقی نہ ہوں تو جملہ درجہ دوم لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے منفی ہوگا اور اس لئے ما خیالی ہوگا۔ اب چونکہ (- ا) مثبت ہے، اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} = \sqrt{-\text{ا}}\,\sqrt{(\text{لا} - \text{عا})(\text{با} - \text{لا})}$$

تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ با > عا (جبریہ لحاظ سے) اور فرض کرو کہ

$$\text{ع} = +\sqrt{\frac{\text{لا} - \text{عا}}{\text{با} - \text{لا}}}$$

$$\text{تب}\quad \text{ع}^2 = \frac{\text{لا} - \text{عا}}{\text{با} - \text{لا}}$$

$$\text{لا} - \text{عا} = \frac{(\text{با} - \text{عا})\text{ع}^2}{1 + \text{ع}^2},\quad \text{با} - \text{لا} = \frac{\text{با} - \text{عا}}{1 + \text{ع}^2},\quad \text{لا} = \frac{\text{عا} + \text{با}\,\text{ع}^2}{1 + \text{ع}^2}$$

$$\text{ما} = \sqrt{-\text{ا}}\,(\text{با} - \text{عا})\frac{\text{ع}}{1 + \text{ع}^2},\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} = \frac{2(\text{با} - \text{عا})\text{ع}}{(1 + \text{ع}^2)^2}$$

نیا تکمل صریحاً ع میں منطق ہوگا۔

صورت (۲) اور (۳) میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سب اصلیں مثبت ہیں (دیکھو دفعہ ۱۴)

اوپر کی تحلیل سے ظاہر ہے کہ اگر ما، $\sqrt{\text{ا لا} + \text{ب}}$ کے مساوی ہو یا $\sqrt{\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج}}$ کے اور تکمل ف (لا، ما) ہر دو لا، ما کا منطق تفاعل ہو تو ف (لا، ما) کا تکمل ہر صورت میں ایک منطق تفاعل کے تکمل میں تحویل ہو سکتا ہے، اسلئے (دفعہ ۱۱) اس کے تکمل میں صرف منطق تفاعلوں لوگارتموں یا مقلوب مستدیر تفاعلوں کی ضرورت ہوتی ہے۔

(۴) فرض کرو کہ تکمل $\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}$ ہے۔

(ا) اگر ف مثبت صحیح عدد ہو تو $(\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}$ کو پھیلاؤ۔

(ب) یہ اندراج کرکے دیکھو $\text{ع} = \text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}}$ جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{1}{\text{ب}^{\frac{1}{\text{ن}}}}(\text{ع}-\text{ا})^{\frac{1}{\text{ن}}}،\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} = \frac{(\text{ع}-\text{ا})^{\frac{1}{\text{ن}}-1}}{\text{ن}\,\text{ب}^{\frac{1}{\text{ن}}}}$$

اور تکملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{\text{ن}\,\text{ب}^{\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}}}\int \text{ع}^{\text{ف}}(\text{ع}-\text{ا})^{\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}-1}\,\text{فرع}$$

پس اگر $\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}$ مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ ثنائی کو پھیلایا جا سکتا ہے اور تکملہ محدود ارقام میں حاصل ہو سکتا ہے۔

(ج) اگر $\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}$ مثبت صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ $\text{لا} = \frac{1}{\text{و}}$، تکملہ ہو جاتا ہے

$$-\int \text{و}^{-\text{م}-\text{ن}\text{ف}-2}(\text{ب}+\text{ا}\,\text{و}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرو}$$

یہاں م کی بجائے $-(\text{م}+\text{ن}\text{ف}+2)$ ہے، اسلئے اگر

$-\frac{(\text{م}+\text{ن}\text{ف}+1)}{\text{ن}}$ مثبت صحیح عدد ہو یعنی $\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}+\text{ف}$ منفی صحیح عدد ہو تو تکملہ محدود ارقام میں حاصل ہو سکتا ہے۔ ابدال اس صورت میں ہوگا

$$\text{ع} = \text{ب}+\text{ا}\,\text{و}^{\text{ن}} = \text{ب}+\text{ا}\,\text{لا}^{-\text{ن}}$$

۱۴۔ اس بحث سے معلوم ہوگا کہ تکمل ایک حد تک اتفاقی عمل ہے، عام نتائج صرف دفعات ۱۲ اور ۱۳ میں حاصل کئے گئے ہیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ تکمل جب کبھی عمل پذیر ہو سکتا ہے تو ہمیں معلومہ شکل کو مختلف طریقوں سے چند معیاری صورتوں میں تحویل کرنا پڑتا ہے۔ دفعہ ۱۳ کی صورتوں کے لئے بھی اکثر اوقات یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ عام مسئلہ کو استعمال کرنے کی بجائے ہم کوئی خاص طریقہ اختیار کریں۔ تبدیلوں کو تکمل میں زیادہ دقت اس وجہ سے ہوتی ہے کہ انہیں جبریہ اور مثلثی

اعمال میں پوری مشق اور مہارت نہیں ہوتی، معیاری صورتوں کو یاد کر لینے کے بعد متغیر کی تبدیلی اور تکمل بالخصوص کے دو اصولوں پر حاوی ہو جانا چاہئے لیکن یاد رہے کہ جو طالب علم ابتدائی قسم کی مثلثی اور جبریہ تحویلوں پر پوری قوت اور عبور نہیں رکھتا وہ خاص صورتوں میں خاص خاص ترکیبیں اختیار کرنے کی وجوہات کو سمجھنے سے قاصر رہیگا، علاوہ اس کے اسے ہر قدم پر ایسی مشکلات کا سامنا ہوگا جو احصا (کیلکلس) کی ذات سے تعلق نہیں رکھتیں بلکہ اُس کی جبریہ تعلیم کی کمی اور کوتاہی کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

تکملہ جبکہ منحصر ہو متغیر کی سعت پر۔ ایک اور طرح کی مشکل قابل توجہ ہے اور وہ یہ ہے کہ تکمل ایک سعت کے لئے ایک شکل رکھتا ہے اور دوسری وسعت کے لئے دوسری شکل مثلاً $\frac{1}{\text{لا}}$ کا تکملہ لوک لا ہے اگر لا مثبت ہو اور لوک (- لا) ہے اگر لا منفی ہو۔

اس صورت میں ہم تکملہ کو اس شکل $\frac{1}{2}$ لوک لا² میں لکھ سکتے ہیں جو دونوں صورتوں پر مشتمل ہے دیکھو دفعہ ۸ مثال ۳ ایک اور صورت کے لئے۔

نیز جذر کی دوہری علامت تکلیف کا باعث ہو سکتی ہے، ہم نے دیکھا ہے کہ $\frac{1}{\text{ا + ب جم لا}}$ کے تکملہ کی دو شکلیں اسی دوہری علامت کی وجہ سے ہیں جو وقوع پذیر ہوتی ہے جبکہ مقلوب جیب التمام کو مماس مقلوب سے حاصل کیا جاتا ہے۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ علامت جذر کے پہلے ہمیشہ مثبت علامت متصور کی جائیگی تو تحویل ف $\sqrt{\text{ق}}$ = $\sqrt{\text{ف}^2\text{ ق}}$ صرف اُسی صورت میں درست ہوگی جبکہ ف مثبت ہو، لیکن اگر ف منفی ہو تو لازماً ف $\sqrt{\text{ق}}$ = - $\sqrt{\text{ف}^2\text{ ق}}$

مشق ۴

امثلہ ۱ تا ۲۴ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو۔

۱- $\frac{\text{لا}^2 - 6\,\text{لا} - 4}{(2\,\text{لا} + 1)(\text{لا} + 2)(3\,\text{لا} + 2)}$ ۲- $\frac{30\,\text{لا}^5}{(\text{لا}^2 - 1)(\text{لا}^2 - 4)}$

۳- $\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ج})}$ ۴- $\frac{\text{لا}}{(\text{لا} + 1)^2(\text{لا} - 1)}$

۵- $\frac{۱}{لا^{۳}(لا-۱)}$ ۶- $\frac{۱}{(لا^{۲}-۱)^{۳}}$

۷- $\frac{لا}{(لا^{۲}-۱)^{۳}}$ ۸- $\frac{لا^{۲}+۱}{لا^{۳}+۱}$

۹- $\frac{لا^{۸}}{لا^{۳}+۱}$ ۱۰- $\frac{لا^{۲}+لا+۱}{لا^{۲}-لا+۱}$

۱۱- $\frac{لا^{۲}}{لا^{۴}+لا^{۲}-۲}$ ۱۲- $\frac{۱}{(لا^{۲}+ا^{۲})(لا^{۲}+ب^{۲})}$

۱۳- $\frac{لا}{(لا^{۲}+ا^{۲})(لا^{۲}+ب^{۲})}$ ۱۴- $\frac{لا^{۲}}{(لا^{۲}+ا^{۲})(لا^{۲}+ب^{۲})}$

۱۵- $\frac{۱}{(لا-۱)(لا^{۲}+۱)^{۲}}$ ۱۶- $\frac{۱}{لا^{۴}+۱}$

۱۷- $\frac{لا^{۲}}{(لا^{۲}+۲لا+۵)^{۲}}$ ۱۸- $\frac{۱}{لا^{۳}(ا لا+ب)}$

۱۹- $\frac{جم\, لا}{۱۶+۹\, جب^{۲} لا}$ ۲۰- $\frac{۱}{۳\, جب\, لا+جب^{۳} لا}$

۲۱- $\frac{لا+۱}{(لا^{۲}+۴لا+۶)^{۳}}$ ۲۲- $\frac{لا^{۲}-ا^{۲}}{لا^{۴}+ا^{۲}لا^{۲}+ا^{۴}}$

۲۳- $\frac{۱}{(لا+۱)(۳لا^{۳}+۱۷لا^{۲}+۴)}$ ۲۴- $\frac{۱}{لا^{۲}(۱+لا^{۲})^{۲}}$

۲۵- تکملہ $\int \frac{فر لا}{(لا-ا)^{م}(لا-ب)^{ن}}$ کو تحویل کرو ذیل کے ابدال کی مدد سے

$ع=\frac{لا-ا}{لا-ب}$ اور اسکی قیمت معلوم کرو جبکہ م = ۳ اور ن = ۲

امثلہ ۲۶ تا ۳۷ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو

۲۶ - $\frac{\sqrt{\text{لا}}}{۱+\text{لا}}$ ۲۷ - $\frac{۱}{\sqrt{\text{لا}}+\sqrt[۳]{\text{لا}}}$ ۲۸ - $\frac{\text{لا}^{۳}}{\sqrt{\text{لا}-۱}}$

۲۹ - $\frac{\text{لا}}{(\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا})^{\frac{۳}{۲}}}$ ۳۰ - $\frac{۱}{(۱+\text{لا}^{۲})\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}$

۳۱ - $\frac{۱}{(۱-\text{لا}^{۲})\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}}$ ۳۲ - $\frac{۱}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{۲}-\text{ا}}}$

۳۳ - $\text{لا}^{۳}\sqrt{\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^{۲}}$ ۳۴ - $\text{لا}^{۳}(۱+\text{لا}^{\frac{۵}{۲}})^{\frac{۱}{۲}}$

۳۵ - $\frac{۱}{\text{لا}^{۲}\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}}$ ۳۶ - $\frac{۲\text{ا}+\text{لا}}{\text{ا}+\text{لا}}\sqrt{\frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{ا}+\text{لا}}}$

۳۷ - $\sqrt{\text{س}\,\text{لا}}$

باب دوم

محدود تکملے ہندسی سوالات میں ان کا استعمال

۱۵- محدود تکملہ۔ اس دفعہ میں اور اگلی دو دفعات میں محدود تکملوں کے متعلق ہم چند ضروری مسائل بیان کریں گے۔

مسئلہ ۱۔ محدود تکملہ صرف اپنی حدود کا تفاعل ہوتا ہے اور یہ تکمل کے متغیر کا تفاعل نہیں ہوتا۔

تکملہ کے ہندسی مفہوم پر غور کرنے سے یہ مسئلہ ظاہر ہے۔ جب تک کہ علامت فا ایک ہی تفاعل کو تعبیر کرتی ہے فا(لا) کی ترسیم جبکہ لا فصلہ ہو وہی ہوگی جو فا(ع) کی ترسیم ہے جبکہ ع کو فصلہ مانا جائے۔ اس لئے

$$\int_{ا}^{ب} \text{فا(لا) فرلا} = \int_{ا}^{ب} \text{فا(ع) فرع}$$

نیز اگر فا(لا) = عف ف(لا) تو فا(ع) = عف ف(ع)

اور ہر دو علامات ایک ہی جملہ ف(ب) - ف(ا) کو تعبیر کرتی ہیں۔

مسئلہ ۲۔ $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا = - $\int_{ب}^{ا}$ فا(لا) فرلا ملاحظہ ہو دفعہ ۱

مسئلہ ۳۔ اگر ا < ب اور فا(لا) تکمل کی سعت کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے مثبت ہو تو تکملہ $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا لازماً مثبت ہوگا اور صفر نہیں ہوگا۔ اگر فا(لا) منفی ہو تو تکملہ منفی ہوگا۔

صریحاً پہلی صورت میں تکملہ جس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے وہ مثبت ہے اور دوسری صورت میں

منفی ۔ اگر فا (لا) وقفہ (ا، ب) میں لا کی بعض قیمتوں کے لئے صفر ہو لیکن سب قیمتوں کے لئے صفر نہ ہو تو بھی ظاہر ہے کہ یہ مسئلہ درست رہیگا۔ اسی طرح کا مشاہدہ مسائل ۵، ۶، ۷ کی صورت میں صادق آئیگا۔

مثلاً اس طرح کی مساوات

$$\int^{٢} \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}-١)^{٢}} = \left[\frac{-١}{\text{لا}-١}\right]^{٢} = -٢$$

مہمل ہے ۔ اس اختلاف کی وجہ یہ ہے کہ مثبت متکمل لا کی قیمت ا کے لئے جو وقفہ (۰، ۲) کے اندر واقع ہے غیر مسلسل ہے ۔

مسئلہ ۴۔
$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ج}} \text{فا(لا) فرلا} + \int_{\text{ج}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا}$$

کیونکہ دائیں جانب کے تکملہ سے جو رقبہ تعبیر ہوتا ہے وہ بلحاظ مقدار اور علامت بائیں جانب کے تکملوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اسی طرح

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ج}} \text{فا(لا) فرلا} + \int_{\text{ج}}^{\text{گ}} \text{فا(لا) فرلا} + \int_{\text{گ}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا}$$

اور ایسے ہی وقفہ (ا، ب) کے حصوں کی کسی تعداد کے لئے۔

واضح ہو کہ درمیانی اعداد ج، گ، ...... میں سے کوئی ایک یا زیادہ عدد وقفہ کے اعداد ا، ب میں سے جو بڑا ہے اُس سے بڑے اور جو چھوٹا ہے اُس سے چھوٹے ہو سکتے ہیں بشرطیکہ فا (لا) متغیر متبوع لا کی اُن سب قیمتوں کے لئے بھی جو اس طرح زیر بحث آجاتی ہیں مسلسل ہو۔

مسئلہ ۵۔ اگر ا < ب اور وقفہ (ا، ب) میں فا (لا) کی بڑی سے بڑی قیمت (جبریہ لحاظ سے) ع ہو اور چھوٹی سے چھوٹی ق تو

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} < \text{ع(ب-ا)} \quad \text{لیکن} > \text{ق(ب-ا)}۔$$

ع - فا (لا) اور فا (لا) - ق دونوں مثبت ہیں ۔ اسلئے

مسئلہ ۳ کی رو سے تکملے

$\int_{ا}^{ب}$ [ع - فا(لا)] فرلا اور $\int_{ا}^{ب}$ [فا(لا) - ق] فرلا -

یعنی $\int_{ا}^{ب}$ ع فرلا - $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا اور $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا - $\int_{ا}^{ب}$ ق فرلا

یا ع (ب - ا) - $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا اور $\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا - ق (ب - ا)

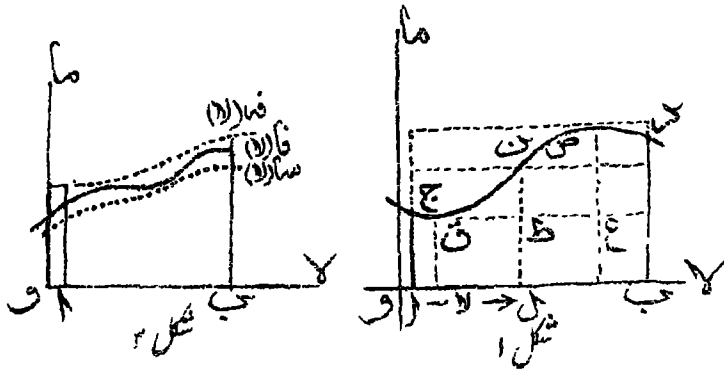
دونوں مثبت ہیں۔ پس تکملہ ع (ب - ا) سے کم ہے اور ق (ب - ا) سے زیادہ ہے۔

تکملہ ط (ب - ا) کے مساوی ہوگا جہاں ط ایک ایسا عدد ہے جو ع سے کم ہے اور ق سے بڑا ہے۔ اب چونکہ فا(لا) مسلسل ہے اسلئے یہ لا کی ایک قیمت لاً کے لئے جو ا، ب کے درمیان ہے ط کے مساوی ہوگا۔ اب قیمت لاً اس شکل کی ہے ا + طہ (ب - ا) جہاں ۰ < طہ < ۱ (دفعہ ۳، حصۂ اول) اسلئے

$\int_{ا}^{ب}$ فا(لا) فرلا = فا(لاً) (ب - ا) = فا[ا + طہ (ب - ا)] (ب - ا)

یہ مسئلہ ذیل کی شکل (۱) سے واضح ہوتا ہے۔ رقبہ ا ب ک ر ص ج سطح ع × ا ب سے کم ہے اور ق × ا ب سے زیادہ ہے یعنی یہ سطح ط × ا ب یا ن ل × ا ب کے مساوی ہے جہاں معین ل ن، ع سے کم ہے اور ق سے زیادہ ہے۔

ط یا فا(لاً) کو بعض اوقات سعت (ب - ا) میں فا(لا) کی اوسط قیمت کہتے ہیں [ملاحظہ ہو دفعہ ۲۵]

شکل ۲ شکل ۱

مسئلہ ۶۔ اگر ا < ب اور وقفہ (ا، ب) میں لا کی ہر ایک قیمت کے لئے فا(لا) جبریہ لحاظ سے فہ(لا) سے کم ہو اور سا(لا) سے بڑا ہو تو

∫ا^ب فا(لا) فرلا < ∫ا^ب فہ(لا) فرلا لیکن > ∫ا^ب سا(لا) فرلا

اس مسئلہ کو مسئلہ ۵ کی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے چونکہ

فہ(لا) - فا(لا) اور فا(لا) - سا(لا)

دونوں مثبت ہیں۔ ہندسی ثبوت کے لئے دیکھو شکل (۲)

مسئلہ ۷۔ ا < ب اور فا(لا) دو تفاعلوں فہ(لا)، سا(لا) کے حاصل ضرب کے مساوی ہے، ان تفاعلوں میں سے ایک یعنی فہ(لا) وقفہ (ا، ب) میں لا کی ہر ایک قیمت کے لئے مثبت ہے۔ ثابت کرو کہ

∫ا^ب فہ(لا) × سا(لا) فرلا < ع ∫ا^ب فہ(لا) فرلا

لیکن > ق ∫ا^ب فہ(لا) فرلا

جہاں ع اور ق وقفہ (ا، ب) میں سا(لا) کی (جبریہ لحاظ سے) بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں ہیں۔

یہ مسئلہ اسی طرح ثابت ہوتا ہے جیسے مسئلہ ۵، کیونکہ ع - سا(لا) اور سا(لا) - ق اور اسلئے فہ(لا) [ع - سا(لا)] اور

فہ(لا) [سا(لا) - ق] مثبت ہیں

اگر وقفہ (ا، ب) کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے فہ (لا) منفی ہو تو

$$\int_{ا}^{ب} \text{فہ(لا) سا(لا) فرلا} > \text{ع} \int_{ا}^{ب} \text{فہ(لا) فرلا}$$

لیکن

$$< \text{ق} \int_{ا}^{ب} \text{فہ(لا) فرلا}$$

چونکہ سا(لا) مسلسل ہے اسلئے دونوں صورتوں میں مسئلہ ۵ کی مانند لکھ سکتے ہیں

$$\int_{ا}^{ب} \text{فا(لا) سا(لا) فرلا} = \text{سا(لا}_{۱}\text{)} \int_{ا}^{ب} \text{فہ(لا) فرلا} \quad .....(۱)$$

جہاں $ا < لا_{۱} < ب$

مسئلہ بالا کو جو مساوات (۱) کی صورت میں بیان ہوا ہے اوسط قیمت کا پہلا (تکملی) مسئلہ کہتے ہیں۔ [ملاحظہ ہو مشق ۵ سوالات ۲۹ تا ۳۱]

مثال۔ اگر ن > ۲ تو ثابت کرو کہ تکملہ

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{ن}}}$$ بڑا ہے ۵، سے اور چھوٹا ہے ۵۲۴، سے۔

تکمل کی سعت میں لا کی ہر قیمت کے لئے (سوائے قیمت صفر کے)

$$\text{لا}^{۲} > \text{لا}^{ن} > ۰ \,،\quad ۱ - \text{لا}^{۲} < ۱ - \text{لا}^{ن} < ۱$$

$$۱ < \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{ن}}} < \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$$

پس تکملہ کم ہے $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}} = \text{جب}^{-۱} \frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۶} = ۵۲۳......،$ سے

لیکن بڑا ہے $\int_{0}^{\frac{1}{2}} ۱\ \text{فرلا} = ۵،$ سے

۱۶ - مربوط تکملے

مسئلہ ۱ – $\int_{۰}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{۰}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{ا} - \text{لا})\,\text{فرلا}$

فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{ا} - \text{ع}$، تب $\text{فرلا} = -\text{فرع}$ اور اگر $\text{لا} = ۰$ تو $\text{ع} = \text{ا}$ اور اگر $\text{لا} = \text{ا}$ تو $\text{ع} = ۰$.

$$\int_{۰}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = -\int_{\text{ا}}^{۰} \text{فا}(\text{ا} - \text{ع})\,\text{فرع} = \int_{۰}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{ا} - \text{ع})\,\text{فرع}$$

اس آخری تکملہ میں ہم ع کی بجائے لا لکھ سکتے ہیں [دفعہ ۱۵، مسئلہ ۱]

اس کی کارآمد صورت یہ ہے $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{ف}(\text{جب لا})\,\text{فرلا} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{ف}\left(\text{جب}\left[\frac{\pi}{2} - \text{لا}\right]\right)\text{فرلا}$

$$= \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{ف}(\text{جم لا})\,\text{فرلا}$$

مسئلہ ۲ – $\int_{-\text{ا}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{۰}^{\text{ا}} \{\text{فا}(-\text{لا}) + \text{فا}(\text{لا})\}\,\text{فرلا}$

کیونکہ $\int_{-\text{ا}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{-\text{ا}}^{۰} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} + \int_{۰}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$

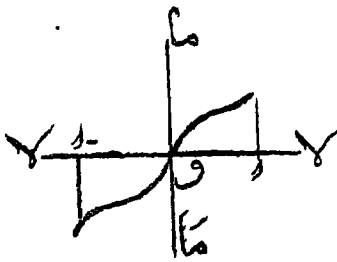
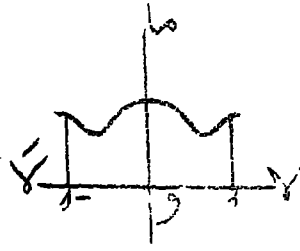
پہلے تکملہ میں فرض کرو کہ $\text{لا} = -\text{ع}$، اور یہ ہو جاتا ہے

$$-\int_{\text{ا}}^{۰} \text{فا}(-\text{ع})\,\text{فرع} = \int_{۰}^{\text{ا}} \text{فا}(-\text{ع})\,\text{فرع} = \int_{۰}^{\text{ا}} \text{فا}(-\text{لا})\,\text{فرلا}$$

جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ $\int_{-\text{ا}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = ۲\int_{۰}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$ اگر $\text{فا}(-\text{لا}) = \text{فا}(\text{لا})$

اور $\int_{-\text{ا}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = ۰$ اگر $\text{فا}(-\text{لا}) = -\text{فا}(\text{لا})$

شکل ۳، و شکل ۳، ب

مذکورہ بالا نتائج ہندسی طریق پر اشکال بالا سے واضح ہوتے ہیں۔

مسئلہ ۳۔ $\int_{\cdot}^{ا}$ فا (لا) فرلا = $\int_{\cdot}^{\frac{ا}{۲}}$ {فا (لا) + فا (ا - لا)} فرلا

جس سے $\int_{\cdot}^{ا}$ فا (لا) فرلا = ۲ $\int_{\cdot}^{\frac{ا}{۲}}$ فا (لا) فرلا اگر فا (ا - لا) = فا (لا)

اور = ۰ اگر فا (ا - لا) = - فا (لا)

ثبوت اسی طرح کا ہے جیسے مسئلہ ۲ کے لئے۔ وقفہ کو حصوں (۰، $\frac{۱}{۲}$ ا) اور ($\frac{۱}{۲}$ ا، ا) میں تقسیم کرو اور دوسرے تکملہ میں رکھو لا = ا - ع

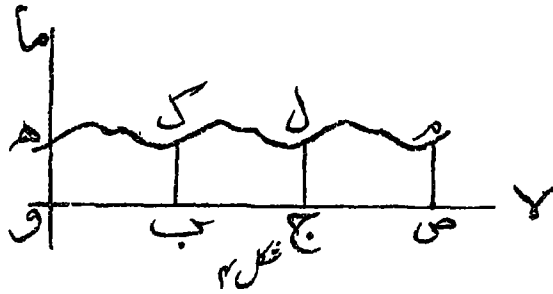
اس نتیجہ کی ایک خاص صورت یہ ہے

$\int_{\cdot}^{\pi}$ ف (جب لا) فرلا = ۲ $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}$ ف (جب لا) فرلا

مسئلہ ۴۔ فا (لا) ایک دوری تفاعل ہے اور اس کا دور ا ہے یعنی فا (لا + ن ا)، ن کی تمام صحیح قیمتوں کے لئے فا (لا) کے مساوی ہے، ثابت کرو کہ

$\int_{\cdot}^{دا}$ فا (لا) فرلا = د $\int_{\cdot}^{ا}$ فا (لا) فرلا

جہاں د کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

شکل ۴

فرض کرو کہ وب = ا = ب ج = ج ص۔

ترسیم کی نوعیت سے ظاہر ہے کہ رقبے وب ک ھ، ب ج ل ک، ج ص م ل

سب مساوی ہیں پس اگر وص = د × وب تو رقبہ

وص م ھ، وب ک ھ کا د گنا ہوگا۔

باسعت د ا کو د حصوں میں تقسیم کرو جہاں ہر حصہ کا طول ا ہو۔ اس طرح

$$\int_{0}^{\text{د ا}} \text{فا(لا) فرلا} = \int_{0}^{\text{ا}} \text{فا(لا) فرلا} + \ldots + \int_{\text{ک ا}}^{\text{(ک+۱) ا}} \text{فا(لا) فرلا}$$

$$+ \ldots + \int_{\text{(د-۱) ا}}^{\text{د ا}} \text{فا(لا) فرلا}$$

جس تکملہ میں حدود ک ا، (ک + ۱) ا ہیں اس میں فرض کرو کہ لا = ع + ک ا

تب فرلا = فرع اور جب لا = ک ا، ع = ۰۔ اور جب لا = (ک+۱) ا

تو ع = ا، پس $\int_{\text{ک ا}}^{\text{(ک+۱) ا}} \text{فا(لا) فرلا} = \int_{0}^{\text{ا}} \text{فا(ع+ک ا) فرع} = \int_{0}^{\text{ا}} \text{فا(ع) فرع}$

$= \int_{0}^{\text{ا}}$ فا(لا) فرلا کیونکہ فا(ع+ک ا) = فا(ع)

اسی طرح مندرجہ بالا د تکملوں میں سے ہر ایک کی یہی قیمت ہے۔ پس نتیجہ ثابت ہوا۔

اگر د منفی ہو تو بھی نتیجہ اسی طرح کے استدلال سے ثابت ہو سکتا ہے۔

خاص صورت میں $\int_{0}^{\text{د} \,۲\pi} \text{ف(جب لا) فرلا} = \text{د} \int_{0}^{۲\pi} \text{ف(جب لا) فرلا}$

تکملوں کی قیمت معلوم کرنے میں یہ مسائل بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

۱۷۔ لامتناہی حدود۔ لامتناہی متکمل۔ اب تک ہم نے یہ مانا ہے کہ تکملہ کی حدود محدود ہیں اور متکمل سعت مفروضہ میں متغیر کی ہر قیمت کے لئے مسلسل ہے اور اس لئے محدود ہے، لیکن بعض صورتوں میں انتہاؤں کے استعمال سے ان قیود کا ہٹا دینا ممکن ہے۔

(ا) لامتناہی حدود۔ اگر کسی تکملہ کی ایک حد لامتناہی ہو تو اسکی ہم یہ تعریف اختیار کرتے ہیں۔

$$\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$$

$$\int_{-\infty}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \text{نہا}_{\text{ا}\to-\infty} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$$

بشرطیکہ ہر صورت میں انتہائیں $\text{ب}\to\infty$ اور $\text{ا}\to-\infty$ کے لئے محدود مقداریں ہوں۔

مثال ۱۔ $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \int_{1}^{\text{ب}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\text{ب}}\right) = 1$

مثال ۲۔ $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \int_{1}^{\text{ب}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \text{لوک ب}$

اس صورت میں لوک ب کی انتہا محدود نہیں ہے، اسلئے تکملہ بے معنی ہے۔

مثال ۳۔ $\int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\, \text{جم لا}\, \text{فرلا}$

دفعہ ۹ مثال ۳ کی رو سے اوپر کا نا محدود تکملہ $\frac{1}{2}\,\text{قو}^{-\text{لا}}(-\text{جم لا} + \text{جب لا})$ کے مساوی ہے۔ اب ہمیں $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{قو}^{-\text{ب}}(-\text{جم ب} + \text{جب ب})$ کی انتہا $\text{ب}\to\infty$ کے لئے معلوم کرنا ہے۔ جم ب، جب ب ہمیشہ ایک سے کم رہتے ہیں اور $\text{قو}^{-\text{ب}}$ کی انتہا صفر ہے۔ پس تکملہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے۔

اپنے تکملوں میں $\text{لا}^{ن}\ \text{قو}^{-\text{ا لا}}$ کی انتہا معلوم کرنے کی اکثر ضرورت پڑتی ہے جبکہ لا ← ∞ اور ا مثبت ہو۔ دفعہ ۴۹ حصہ اول کی مدد سے یہ دیکھنا آسان ہے کہ

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\infty}\ \text{لا}^{ن}\ \text{قو}^{-\text{ا لا}} = ۰$$

نیز دیکھو مشق ۷ مثال ۹ حصہ اول۔

(ب) لامتناہی متکمل۔ فرض کرو کہ فا (لا)، ا اور ب کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے سوائے قیمت لا = ا کے۔ اس کے لئے یہ لامتناہی ہوجاتا ہے۔ ہم حدود ا اور ب کے درمیان فا (لا) کے تکملہ کی یہ تعریف اختیار کرتے ہیں۔

اگر ا کم ہو ب سے اور صہ مثبت ہو تو

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا (لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to۰} \int_{\text{ا}+\text{صہ}}^{\text{ب}} \text{فا (لا) فرلا}$$

بشرطیکہ انتہا محدود مقدار ہو۔

اگر فا (لا) مسلسل ہو سوائے لا = ب پر اور صہ مثبت ہو تو

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا (لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to۰} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}-\text{صہ}} \text{فا (لا) فرلا}$$

مثال ۱۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to۰} \int_{\text{صہ}}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to۰} (۲ - ۲\sqrt{\text{صہ}}) = ۲$

مثال ۲۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to۰} \int_{۰}^{۱-\text{صہ}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to۰}\ \text{جب}^{-۱}(۱-\text{صہ})$

اسکی انتہا صریحاً $\text{جب}^{-۱}\ ۱$ یعنی $\frac{\pi}{۲}$ ہے۔

مثال ۳۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^۲} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to۰} \int_{\text{صہ}}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^۲} = \text{نہا}_{\text{صہ}\to۰} \left(\frac{۱}{\text{صہ}} - ۱\right)$

اس صورت میں انتہا محدود نہیں ہے اور تکملہ بے معنی ہے۔

اگر ا < ج < ب اور فا (لا) مسلسل ہو سوائے لا = ج کے لئے تو ا اور ب کے درمیان تکملہ مذکور کی تعریف یہ ہوگی۔

صہ اور صہَ دونوں مثبت ہیں

$$\int_{ا}^{ب} \text{فا (لا) فرلا} = \underset{\text{صہ} \to ٠}{\text{نہا}} \int_{ا}^{\text{ج} - \text{صہ}} \text{فا (لا) فرلا} + \underset{\text{صہَ} \to ٠}{\text{نہا}} \int_{\text{ج} + \text{صہَ}}^{ب} \text{فا (لا) فرلا}$$

بشرطیکہ دونوں انتہائیں الگ الگ محدود ہوں۔

مثال ۴- $\int_{-١}^{٨} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\frac{٢}{٣}}} = \underset{\text{صہ} \to ٠}{\text{نہا}} (-٣ \sqrt[٣]{\text{صہ}} + ٣) + \underset{\text{صہَ} \to ٠}{\text{نہا}} (٢ \cdot ٣ - ٣ \sqrt[٣]{\text{صہَ}})$

اس جگہ پہلی انتہا ۳ ہے اور دوسری بھی ۳ ہے۔ اسلئے تکملہ کی قیمت ۶ ہے۔

مثال ۵- $\int_{٠}^{٢} \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - ١)^{٢}} = \underset{\text{صہ} \to ٠}{\text{نہا}} (\frac{١}{\text{صہ}} - ١) + \underset{\text{صہَ} \to ٠}{\text{نہا}} (-١ + \frac{١}{\text{صہَ}})$

اس صورت میں انتہا محدود نہیں ہے اور تکملہ بے معنی ہے۔

لامتناہی متکمل یا لامتناہی حدود کی وجہ سے جو مشکلات پیدا ہوتی ہیں وہ اکثر اوقات متغیر کی مناسب تبدیلی سے رفع ہو جاتی ہیں۔ مثلاً مثال ۲ میں اگر لا = ا جب طہ وغیرہ، کی صورت جبریہ میں متغیر کی تبدیلی بالخصوص کارگر ثابت ہوگی۔

فا (لا) کی ترسیم کے ذریعہ تکملوں کی ان مستثنیٰ صورتوں کی ہندسی توضیح ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ فا (لا) = $\frac{١}{\text{لا}^{ن}}$ جہاں ن مثبت ہے۔

اس صورت میں محور لا متقارب ہے اور رقبہ ل م د ج (ن = ۱)

$$\int_{ا}^{ب} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{ن}} = \frac{١}{ن - ١} \left(\frac{١}{ا^{ن-١}} - \frac{١}{ب^{ن-١}} \right)$$

اب اگر ن < ۱ تو یہ رقبہ مائل بہ $\frac{(ب - ا)^{۱-ن}}{۱ - ن}$ ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو، لیکن اگر ن > ۱ تو رقبہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے کیونکہ صہ$^{۱-ن}$ یعنی $\frac{۱}{صہ^{ن-۱}}$ مائل بہ لامتناہی ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو۔ اگر ن = ۱ تو رقبہ لوک $\left(\frac{ب - ا}{صہ}\right)$ کے مساوی ہوتا ہے اور اس لئے یہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو۔

مسئلہ ۷ دفعہ ۱۵ کی مدد سے یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر ا کے نزدیک فا (لا) کی شکل $\frac{فما (لا)}{(لا - ا)^{ن}}$ ہو جہاں فما (لا) مسلسل ہے تو رقبہ ع م ر ف اور متناظر تکملہ دونوں ایک محدود انتہا رکھتے ہیں جبکہ ن مثبت کسر واجب ہو لیکن اگر فما (ا) صفر نہ ہو تو یہ انتہا لامتناہی ہوتی ہے جبکہ ن ایک کے مساوی یا ایک سے بڑا ہو۔

مستثنیٰ صورتوں کی مزید بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

مشق ۵

ذیل کے تکملوں کی قیمتیں معلوم کرو

$\int_{۰}^{∞}$ ق$^{-ا لا}$ جم ب لا د لا (ا > ۰)

اگر ن مثبت $\int_{۰}^{∞}$ ق$^{-ا لا}$ جب ب لا د لا (ا > ۰)

۱۹- اگر ع =

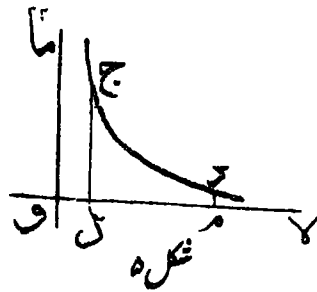
$\frac{د لا}{لا^{۲} + ۲ لا + ۲}$

۴- $\int_{۰}^{∞} \frac{د لا}{(لا^{۲} + ا^{۲})^{۳}}$

ع = $\int_{۰}^{۲} \frac{لا^{\frac{۵}{۲}} د لا}{\sqrt{(۲ - لا)}}$ اسی طرح

۶- $\int_{۰}^{۲ا} \frac{لا د لا}{\sqrt{۲ ا لا - لا^{۲}}}$

جہاں و ل = ا اور و م = ب

شکل ۵

اگر ن > ۱ تو رقبہ ل م ح ج مائل بہ $\frac{1}{(ن-1)ا^{ن-1}}$ ہوتا ہے جبکہ ب مائل بہ ∞ ہو لیکن اگر ن < ۱ تو رقبہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے کیونکہ $\frac{1}{ب^{ن-1}}$ یعنی $ب^{1-ن}$ مائل بہ ∞ ہوتا ہے ۔ اگر ن = ۱ تو رقبہ ل م ح ج لوگ $(\frac{ب}{ا})$ کے مساوی ہے اور اس لئے ب کے ساتھ مائل بہ ∞ ہوتا ہے ۔

بخلاف اسکے فا(لا) = $\frac{1}{(لا-ا)^ن}$ پر غور کرو جہاں ن مثبت ہے ۔

شکل ۶

اگر و ل = ا، ل ع = صہ، و م = ب

تو رقبہ ع م ح ف (ن ≠ ۱)

$$\int_{ا+صہ}^{ب} \frac{ء لا}{(لا-ا)^ن} = \frac{1}{1-ن}\left\{(ب-ا)^{1-ن} - صہ\right.$$

۷- $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \frac{\text{ور لا}}{\sqrt{(\text{لا}-\text{ا})(\text{ب}-\text{لا})}}$ [رکھو $\text{لا} = \text{ا}\,\text{جم}^2\,\text{طہ} + \text{ب}\,\text{جب}^2\,\text{طہ}$]

۸- $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \sqrt{(\text{لا}-\text{ا})(\text{ب}-\text{لا})}\ \text{ور لا}$ ۹- $\int_{-1}^{1} \frac{\text{ور لا}}{(\text{ا}-\text{ب لا})\sqrt{1-\text{لا}^2}}$ (ا > ب >

۱۰- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ور لا}}{\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{لا}}$ ۱۱- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ور لا}}{(\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{لا})^2}$

۱۲- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم}^2\,\text{لا جب لا ور لا}}{1 + \text{ز}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا}}$ ۱۳- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم}^2\,\text{لا جب لا ور لا}}{\sqrt{1 + \text{ز}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا}}}$

۱۴- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{سس لا ور لا}$ ۱۵- $\int_{0}^{1} \text{لوک لا ور لا}$

۱۶- $\int_{0}^{1} \text{لا}^2\,\text{لوک لا ور لا}$

۱۷- اگر م اور ن مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{1} \text{لا}^{\text{م}}(1-\text{لا})^{\text{ن}}\ \text{ور لا} = \int_{0}^{1} \text{لا}^{\text{ن}}(1-\text{لا})^{\text{م}}\ \text{ور لا}$$

۱۸- اگر ن مثبت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\infty} \text{و}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\ \text{ور لا} = \text{ن} \int_{0}^{\infty} \text{و}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\ \text{ور لا}$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اس تکملہ کی قیمت معلوم کرو

۱۹- اگر $\text{ع} = \int_{0}^{\pi} \frac{\text{لا جب لا ور لا}}{1 + \text{جم}^2\,\text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع} = \int_{0}^{\pi} \frac{\pi\ \text{جب لا ور لا}}{1 + \text{جم}^2\,\text{لا}} - \text{ع}$$

اس طرح ع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۰۔ اگر $\text{ع} = \int_{۰}^{\pi} \frac{\text{لا فرلا}}{۱ + \text{ز جب لا}}$ جہاں $۰ < \text{ز} < ۱$

تو ثابت کرو کہ $\text{ع} = \int_{۰}^{\pi} \frac{\pi\ \text{فرلا}}{۱ + \text{ز جب لا}} - \text{ع}$

اس طرح ع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا})\ \text{فرلا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{ا} + \text{ب} - \text{لا})\ \text{فرلا}$

۲۲۔ اگر ن مثبت صحیح ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}}\ \text{لا فرلا} > \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{\text{ن}+۱}\ \text{لا فرلا}$$

اس سے ثابت کرو کہ $\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{۲\times۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times \dots\dots \times ۲\text{ن}\times۲\text{ن}}{۱\times۳\times۳\times۵\times۵\times۷\times \dots\dots \times(۲\text{ن}-۱)(۲\text{ن}+۱)}$

اور اس کسر کے درمیان واقع ہوتا ہے جو شمار کنندہ اور نسب نما دونوں سے آخری جزو ضربی حذف کرنے سے حاصل ہو (یہ π کی قیمت والی کے نام کے ساتھ منسوب ہے)

۲۳۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{\text{ن}\pi} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\ \text{فرلا} = \text{ع}_۰ - \text{ع}_۱ + \text{ع}_۲ - \text{ع}_۳ + \dots\dots + (-۱)^{\text{ک}}\ \text{ع}_{\text{ک}} + \dots\dots \pm \text{ع}_{\text{ن}-۱}$$

جہاں $\text{ع}_{\text{ک}} = \int_{۰}^{\pi} \frac{\text{جب ع فرع}}{\text{ع} + \text{ک}\pi}$

ثابت کرو کہ $\text{ع}_۰$، $\text{ع}_۱$، $\text{ع}_۲$ ..... مثبت ہیں اور اگر ک ایک کے مساوی ہو یا ایک سے بڑا ہو تو $\text{ع}_{\text{ک}}$ کم ہوگا $\frac{۱}{\text{ک}}$ سے، $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کی ترسیم کے ذریعہ ان نتائج کی تعبیر معلوم کرو۔ اور ثابت کرو کہ $\text{ن} \to \infty$ کے تکملہ کی انتہا محدود ہے۔ یہ انتہا $\frac{\pi}{۲}$ ہے لیکن اس کا ثبوت یہاں نہیں دیا جا سکتا۔

٢٤- ثابت کرو کہ $\int_{٠}^{١} \frac{فرلا}{\sqrt{(٤ - لا^{٢} + لا^{٣})}} > \frac{١}{٢}$ لیکن $< \frac{\pi}{٦}$

٢٥- ثابت کرو کہ $\int_{٠}^{١} \frac{فرلا}{\sqrt{(٤ - ٣لا + لا^{٣})}} > \int_{٠}^{١} \frac{فرلا}{\sqrt{(٤ - ٣لا)}} < \int_{٠}^{١} \frac{٨ + ٢لا + لا^{٢}}{١٦} فرلا$

یعنی $> \frac{٢}{٣}$ لیکن $< \frac{١٩}{٣٢}$

٢٦- ثابت کرو کہ $\int_{١}^{٢} \frac{فرلا}{\sqrt{(٤ - ٣لا + لا^{٣})}} > ٠٫٥٣$ لیکن $< ٠٫٥٩٥$

رکھو $لا = ١ + ع$، پھر $ع^{٣} + ٣ع^{٢} + ٢$ کی بجائے $٤ع^{٢} + ٢$ اور $٣ع^{٢} + ٢$ رکھو

٢٧- اگر عم اور فم دو مثبت حادے زاوئے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\int_{٠}^{فم} \frac{فرلا}{\sqrt{(١ - جب^{٢}عم\, جب^{٢}لا)}} > فم \quad لیکن \quad < \frac{فم}{\sqrt{(١ - جب^{٢}عم\, جب^{٢}فم)}}$$

اگر $عم = فم = \frac{\pi}{٦}$ تو ثابت کرو کہ تکملہ ٠٫٥٢٣ اور ٠٫٥٤١ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

اور طریقوں سے جن میں زیادہ صحت ممکن ہے اس تکملہ کی تقریبی قیمت ٠٫٥٢٩٤٣ حاصل ہوتی ہے۔

٢٨- ثابت کرو کہ

(١) $\int_{١}^{\infty} تو^{-لا^{٢}} فرلا < \int_{١}^{\infty} لا\, تو^{-لا^{٢}} فرلا$ (٢) $\int_{٠}^{\infty} تو^{-لا^{٢}} فرلا < ١ + \frac{١}{٢تو}$

٢٩- اس مجسم کے حجم پر غور کرنے سے جو محدودوں کی سطحوں، مستویات $لا = ا$ اور $لا = ب$ اور اسطوانوں $ما = فہ(لا)$ اور $ہی = سا(لا)$ کے درمیان گھرا ہوا ہے دفعہ ١٥، مسئلہ ٥ کی ہندسی تعبیر معلوم کرو۔

٣٠- اگر سا(لا) مثبت ہو اور وقفہ (ا، ب) میں فہ(لا) مثبت گھٹنے والا

تفاعل ہو تو مثال ۲۹ کا جو مجسم ہے اسکے حجم پر غور کرنے سے ثابت کرو کہ

(۱) ∫ د^ب فما (لا) سما (لا) فرلا = فما (د) ∫ د^ضا سما (لا) فرلا جہاں د < ضا < ب

لیکن اگر فما (لا) مثبت، بڑھنے والا تفاعل ہو تو

(۲) ∫ د^ب فما (لا) سما (لا) فرلا = فما (ب) ∫ ضا^ب سما (لا) فرلا جہاں د < ضا < ب

(۳)۔ اگر لا کے د سے ب تک بڑھنے سے فما (لا) بڑھے (جبریہ لحاظ سے) تو ثابت کرو کہ مثال ۳۰ (۱) میں فما (لا) کی بجائے فما (ب) ۔ فما (لا) رکھا جا سکتا ہے لیکن اگر فما (لا) جبریہ لحاظ سے گھٹے تو مثال ۳۰ (۲) میں فما (لا) کی بجائے فما (د) ۔ فما (لا) رکھا جا سکتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر یہ ابدال عمل میں لائے جائیں تو ہر دو (۱) اور (۲) ہو جاتے ہیں

∫ د^ب فما (لا) سما (لا) فرلا = فما (د) ∫ د^ضا سما (لا) فرلا + فما (ب) ∫ ضا^ب سما (لا) فرلا

اس صورت میں فما (لا) مثبت ہو سکتا ہے یا منفی ۔ اوپر کی مساوات میں جو مسئلہ بیان ہوا ہے اُسے اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ (تکملی) کہتے ہیں ۔ یہ مسئلہ درست رہیگا اگر سما (لا) ہر دو مثبت اور منفی قیمتیں اختیار کرے اگرچہ اس صورت میں مسئلہ کی توضیح کے لئے مزید تشریح کی ضرورت ہوگی ۔

رقبہ سے توضیح کرو جبکہ سما (لا) = ۱

دفعہ ۱۸ ۔ چند معیاری رقبے اور حجم ۔

اس دفعہ میں ہم چند مشہور نتائج جو اس سے قبل حاصل کئے جا چکے ہیں یا بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں جمع کرینگے ۔

(۱) قائم مستدیر اسطوانہ ۔ فرض کرو کہ قاعدہ کا نصف قطر ا ہے اور ارتفاع ف،

حجم = π ا^۲ ف ، منحنی سطح = ۲ π ا ف

(۲) قائم مستدیر مخروط ۔ فرض کرو کہ قاعدہ کا نصف قطر ا ہے ، ارتفاع فا،

ضلع مائل = $\text{ل} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ف}^2}$

$$\text{حجم} = \tfrac{1}{3}\pi\,\text{ا}^2\,\text{ف}\text{،}\quad \text{منحنی سطح} = \pi\,\text{ا}\,\text{ل}$$

مخروط ناقص کے لئے جس کا ارتفاع ف ہے، مائل ضلع ل اور سروں کے نصف قطر ا اور ب، حجم = $\tfrac{1}{3}\pi(\text{ا}^2 + \text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}^2)\,\text{ف}$،
منحنی سطح = $\pi(\text{ا} + \text{ب})\,\text{ل}$

فرض کرو کہ اسی مخروط کے قاعدہ کا رقبہ ق ہے، ارتفاع ف اور راس سے فاصلہ لا پر قاعدہ کے متوازی جو مخروطی تراش ہے اسکا رقبہ ک ہے

$$\text{تب}\quad \text{ک} : \text{ق} = \text{لا}^2 : \text{ف}^2$$

کیونکہ متوازی تراشیں متشابہ ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ اس حصہ کا حجم ح ہے جس کا قاعدہ ک ہے اور ارتفاع لا۔ پہلے رتبہ کے صغاریات تک مف ح = ک مف لا اور $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{ح} = \text{ک}$، اس لئے کل مخروط کا حجم ہے

$$\int_0^{\text{ف}} \text{ک}\,\text{فر}\,\text{لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}^2}\int_0^{\text{ف}} \text{لا}^2\,\text{فر}\,\text{لا} = \tfrac{1}{3}\,\text{ق}\,\text{ف}$$

مخروط ناقص کے لئے جس کا ارتفاع ف ہو اور سروں کے رقبے ا اور ب

$$\text{حجم} = \tfrac{1}{3}\left\{\text{ا} + \sqrt{\text{ا}\,\text{ب}} + \text{ب}\right\}\text{ف}$$

(۳) کرہ ۔ فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ر ہے۔ دفعہ ۸۵، مثال ۲ حصہ اول کی رو سے اس کروی ٹوپی کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو = $\pi\,\text{ف}^2(\text{ر} - \tfrac{1}{3}\text{ف})$ اور ٹوپی کی کروی سطح = $2\pi\,\text{ر}\,\text{ف}$۔ اگر ان نتائج میں ف کو ۲ ر کے مساوی رکھا جائے تو کرہ کا حجم اور سطح بالترتیب $\tfrac{4}{3}\pi\,\text{ر}^3$ اور $4\pi\,\text{ر}^2$ حاصل ہوتے ہیں۔ یہ توجہ کے قابل ہے کہ کروی ٹوپی کی منحنی سطح اس اسطوانہ کی منحنی سطح کے مساوی ہے جس کا ارتفاع وہی ہو جو ٹوپی کا ہے اور جس کا قاعدہ کرہ کے بڑے دائرے کے مساوی ہو۔ اگر کروی قطاع کا حجم معلوم کرنا ہو تو ٹوپی کے حجم میں اس مخروط کا حجم جمع کیا جا سکتا ہے

جس کا راس کرہ کے مرکز پر ہو اور جس کا ارتفاع ر - ف ہو۔ پس حجم مطلوبہ ہے

$$\pi ف^2 (ر - \frac{1}{3} ف) + \frac{1}{3} \pi (2 ر ف - ف^2)(ر - ف)$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \pi ر^2 ف = \frac{1}{3} س ر$$

جہاں س ٹوپی کی سطح ہے۔ یہ نتیجہ زیادہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے اگر ٹوپی کی سطح کو چھوٹے رقبوں کی بڑی تعداد میں تقسیم کیا ہوا فرض کریں۔ اس طرح قطاع کرہ ایسے مخروطوں کی ایک بڑی تعداد سے بنا ہوا متصور ہوگا جن میں سے ہر ایک کا ارتفاع ر ہے، پس قطاع کا حجم اس طرح بھی $\frac{1}{3}$ س ر ہوگا۔

(۴) ناقص۔ ناقص کے محور ۲ ا، ۲ ب ہیں، اس کا رقبہ

$$= 4 \int_0^{ا} ما \, فرلا = \frac{4 ب}{ا} \int_0^{ا} \sqrt{ا^2 - لا^2} \, فرلا = \pi ا ب$$

اس کرہ نما کا حجم جو ناقص کو محور اعظم ۲ ا کے گرد پھرانے سے حاصل ہو

$$= 2 \int_0^{ا} \pi ما^2 \, فرلا = 2 \pi \frac{ب^2}{ا^2} \int_0^{ا} (ا^2 - لا^2) \, فرلا = \frac{4}{3} \pi ا ب^2$$

اس کرہ نما کو انگوری یا لمبوترا کرہ نما کہا جا سکتا ہے۔ جب گردش کا محور محور اصغر ۲ ب ہو تو کرہ نما چپٹا سیب کی شکل کا ہوگا، ایسے کرہ نما کا حجم

$$= 2 \int_0^{ب} \pi لا^2 \, فرما = 2 \pi \frac{ا^2}{ب^2} \int_0^{ب} (ب^2 - ما^2) \, فرما = \frac{4}{3} \pi ا^2 ب$$

لمبوترے کرہ نما کی سطح ہے

$$2 \int_0^{ا} 2 \pi ما \frac{فرس}{فرلا} \, فرلا$$

جہاں $\left(\frac{فرس}{فرلا}\right)^2 = 1 + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2 = \frac{ا^4 - (ا^2 - ب^2) لا^2}{ا^2 (ا^2 - لا^2)}$

فرض کرو کہ ناقص کا خروج المرکز ز ہے، تب $ا^2 ز^2 = ا^2 - ب^2$

اور چونکہ ب = ا $\sqrt{۱ - ز^2}$ اسلئے تکملہ اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$۴\pi \sqrt{۱ - ز^2} \int_{۰}^{ا} \sqrt{ا^2 - ز^2 لا^2}\, فرلا$$

اور اسکی قیمت ہے

$$۲\pi ا^2 \left\{ ۱ - ز^2 + \sqrt{۱ - ز^2}\, \frac{جب^{-1} ز}{ز} \right\}$$

ز ← ۰ کے لئے اس جملہ کی انتہا $۴\pi ا^2$ ہے جو نصف قطر ا کے کرہ کی سطح ہے۔
چپٹے کرہ نما کے لئے طالب علم دیکھیگا کہ سطح مطلوبہ ہے

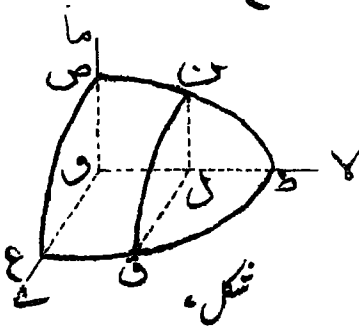
$$۲\int_{۰}^{ب} ۲\pi لا \frac{فرس}{فرما}\, فرما = \frac{۴\pi}{۱ - ز^2} \int_{۰}^{ا\sqrt{۱-ز^2}} \sqrt{\{ا^2(۱ - ز^2)^2 + ز^2 ما^2\}}\, فرما$$

$$= ۲\pi ا^2 \left\{ ۱ + \frac{۱ - ز^2}{۲ز}\, لوک \frac{۱ + ز}{۱ - ز} \right\}$$

چونکہ $\frac{۱}{ز}\, لوک \frac{۱ + ز}{۱ - ز} = لوک\, (۱ + ز)^{\frac{۱}{ز}} + لوک\, (۱ - ز)^{-\frac{۱}{ز}}$

اسلئے $نہا_{ز \to ۰} \frac{۱}{ز}\, لوک \frac{۱ + ز}{۱ - ز} = لوک\, و + لوک\, و = ۲$ (دفعہ ۴۸ حصہ اول نتیجہ صریح)

پس ز ← ۰ کے لئے اس رقبہ کی انتہا $۴\pi ا^2$ ہے۔

(۵) ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$

محدودوں کی مستوی سطحوں پر اس منحنی سطح کی تراشیں ناقص ہیں، سطح ما و ے کے متوازی مستوی تراش ل ن ق ہے جو قطع ناقص ہے۔ اگر و ل = لا تو

شکل ۷

$$ل ن = \frac{ب}{ا}\sqrt{ا^2 - لا^2}$$

$$ل ق = \frac{ج}{ا}\sqrt{ا^2 - لا^2}$$

اور چوتھائی ناقص ن ل ق کا رقبہ

$$لا = \frac{\pi}{4}\, ل ن \times ل ق = \frac{\pi\, ب ج}{4 ا^2}\left(ا^2 - لا^2\right)$$

اگر محدودوں کی سطوح مستویہ، سطح ص ع ق ن اور تراش ن ل ق کے درمیان گھرا ہوا حجم ح ہو تو رتبۂ اول کے صفاریات تک

$$مف ح = لا\, مف لا \quad \text{اور} \quad عف ح = لا$$

اسلئے ثمن و ط ص ع کا حجم

$$= \int_0^{ا} لا\, ءلا = \frac{\pi\, ب ج}{4 ا^2}\int_0^{ا}\left(ا^2 - لا^2\right) ءلا = \frac{\pi\, ا ب ج}{6}$$

اس لئے ناقص نما کا کل حجم $\frac{4}{3}\pi$ ا ب ج ہوا۔

امثلہ ۲ اور ۵ میں حجم دریافت کرنے کا جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اُس کا استعمال صریحاً ہر ایسی صورت میں ہو سکتا ہے جہاں محور لا پر کی عمودی تراش کا رقبہ لا کا معلومہ تفاعل فا(لا) ہو۔ ایسی صورت میں حجم مناسب حدود کے اندر محض فا(لا) کا تکملہ ہوتا ہے۔ [دیکھو مثال ۳، دفعہ ۸۵ حصۂ اول] اگر محور قائم نہ ہوں تو اس صورت میں حسب ترسیم کی ضرورت ہوگی اور اسکا دیکھنا آسان ہے۔

منحنیات کا مرتسم کرنا۔ اگلی مشقوں تک جانے سے پہلے طالب علم اُن ہدایات اور اشاروں کو غور سے دیکھ لے جو پہلے بابوں میں منحنیات کی ترسیم کے متعلق دیے گئے ہیں۔ ان کی مدد سے اور پہلے اور دوسرے مشتقوں کی مزید اعانت سے وہ مقابلتہً آسان منحنیات کی ترسیمیں بنا سکیگا۔ بالعموم اُسے کچھ اس طرح کا طرزِ عمل اختیار کرنا چاہیے

(۱) تشاکل دیکھنے کی غرض سے مساوات کا معائنہ کیا جائے۔
(۲) یہ دیکھا جائے کہ منحنی محوروں کو کہاں عبور کرتا ہے۔
(۳) لا کی (یا صا کی) وہ محدود قیمتیں معلوم کی جائیں جو صا کو (یا لا کو) لامتناہی بنا دیتی ہیں۔ یہ قیمتیں بالعموم ان متقاربوں کو ظاہر کرینگی جو محوروں کے متوازی ہیں۔ مائل متقارب سادہ صورتوں میں دفعہ ۲۴ یا دفعہ ۶۰ حصۂ اول کے طریقوں سے حاصل ہو سکتے ہیں، لیکن ایسی صورتوں کی تفصیلی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔
(۴) ایک محدد کی وہ قیمتیں معلوم کی جائیں جو دوسرے محدد کی متناظر قیمتوں کو خیالی بنا دیتی ہیں۔
(۵) منحنی کا ڈھال دریافت کیا جائے (ملاحظہ ہو دفعہ ۵۴ حصۂ اول)۔ نیز موڑ پر سے نقطے معلوم کئے جائیں۔
(۶) دوسرا مشتق معلوم کیا جائے۔ اس سے قوس کے تقعر اور تحدب نیز اس کے نقاط انعطاف کا پتہ چلیگا، لیکن دوسرے مشتق کے معلوم کرنیکا عمل اکثر اوقات دشوار اور محنت طلب ہوتا ہے اور منحنی کا عام طریق بغیر اسکی مدد کے عام تخیلات کی بنا پر بخوبی معلوم ہو سکتا ہے۔

قطبی مساواتوں کے لئے بھی طرز عمل ایسا ہی ہے۔ اس میں اکثر اوقات سہولت ہوگی کہ سمتی نیم قطر کو منفی بھی مانا جاسکے۔ مثلاً نقطہ (۱-، ۱-) تیسرے ربع میں واقع ہے، اسکے قطبی محدد ($\sqrt{2}$، $\frac{5\pi}{4}$) یا ($-\sqrt{2}$، $\frac{\pi}{4}$) دونوں ہو سکتے ہیں۔ دوسری شکل ($-\sqrt{2}$، $\frac{\pi}{4}$) کے یہ معنی ہیں۔ فرض کرو کہ ∠ لا و ن، $\frac{\pi}{4}$ کے مساوی ہے۔ اور و ن = $\sqrt{2}$، ن و کو و میں سے ن′ تک اتنا خارج کیا جائے کہ و ن′ = ن و، تب ن′ مطلوبہ نقطہ ($-\sqrt{2}$، $\frac{\pi}{4}$) ہوگا۔ (ملاحظہ ہو مشق ۶، مثال ۲۳)

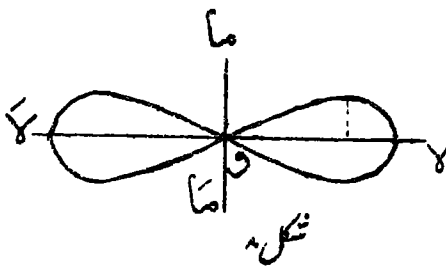
رقبہ یا قوس کا طول نکالنے سے پہلے منحنی کی عام شکل معلوم کرلینی چاہئے۔ تکملوں کے حل کرنے میں ابدالوں سے کام لینا پڑے گا، طالب علم یاد رکھے کہ ابدال کے مناسب انتخاب سے عمل میں بہت سہولت واقع ہوگی۔

خواہ منحنی کی مساوات قائم محددوں میں ہو بعض اوقات اسے قطبی محددوں میں تبدیل کرلینے سے عمل تکمل میں اختصار پیدا ہوگا۔

مشق ۶

۱۔ مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ محور لا کے گرد گھومنے سے مجسم پیدا کرتا ہے، ایک مستوی سطح نقطہ $\text{لا} = \text{ھ}$ میں سے محور لا پر عمود وار گذرتی ہے اور اس مجسم کو کاٹتی ہے۔ مقطوعہ کا حجم اور اسکی منحنی سطح معلوم کرو۔

۲۔ محور لا پر کے نقطہ $\text{لا} = \text{ھ}$ میں سے ایک مستوی سطح محور لا پر عمود وار گزرتی ہے اور مکافی نما $\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}} + \frac{\text{ز}^2}{\text{ج}} = ۲\,\text{لا}$ کو قطع کرتی ہے۔ محدود مقطوعہ کا حجم دریافت کرو۔

۳۔ منحنی $\text{ا}^2\,\text{ما}^2 + \text{ب}^2\,\text{لا}^4 = \text{ا}^2\,\text{ب}^2\,\text{لا}^2$ (شکل ۸) جو رقبہ گھیرتا ہے اسے معلوم کرو۔

دونوں محوروں کے گرد تشاکل،

$\text{لا}^2 \leqq \text{ا}^2$، ما کی قیمت اعظم $= \frac{\text{ب}}{۲}$

محور لا کے گرد گھومنے سے منحنی جو مجسم پیدا کرتا ہے اسکا حجم دریافت کرو۔

شکل ۸

۴۔ منحنی $\text{ج}^2\,\text{ما}^2 = \text{لا}^2\,(\text{لا} - \text{ا})\,(\text{ب} - \text{لا})$ سے جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔ $\text{ب} > \text{ا} > ۰$۔

اگر لا کم ہو ا سے یا بڑا ہو ب سے تو ما خیالی ہوتا ہے، سوائے

لا = ۰ کے جبکہ ما = ۰ ۔ اسلئے یہ بند منحنی ہے اور محور لا کے گرد متشاکل ہے ۔ مبدأ منحنی پر واقع ہے،
مگر اس کے نزدیک کوئی اور نقطہ نہیں ۔ یہ **اکیلا** نقطہ کہلاتا ہے ۔

۵۔ منحنی (لا² + ما²)² = ا² لا² + ب² ما² کا رقبہ معلوم کرو۔

قطبی محددوں میں لے جاؤ۔ مبدأ اکیلا نقطہ ہے۔

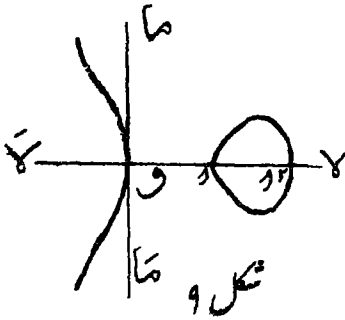
۶۔ منحنی ب ما² = لا (لا − ا)(۲ا − لا) کو مرتسم کرو جہاں ا، ب دونوں مثبت ہیں۔

ما خیالی ہے جبکہ (۱) لا > ۲ا (۲) ۰ ≤ لا < ا ۔
منحنی ایک لامتناہی شاخ اور ایک بیضوی حلقہ پر مشتمل ہے دیکھو شکل ۹

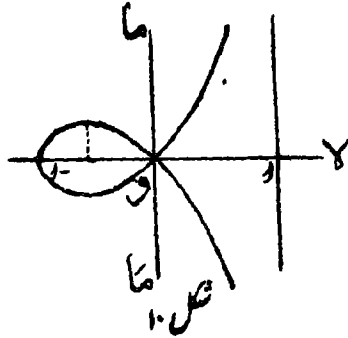
۷۔ منحنی ۱۶ ا² ما² = ب² لا² (ا − ۲لا)
کے حلقہ کا رقبہ معلوم کرو، ا اور ب دونوں مثبت ہیں۔

شکل ۹

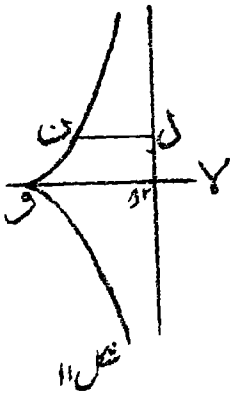
۸۔ منحنی ک ما² = (لا − ا)(لا − ب)(لا − ج) کو مرتسم کرو جہاں ج > ب > ا > ۰، اور ک > ۰ ۔
مفصلہ ذیل صورتوں پر غور کرو۔

(۱) ا = ب (۲) ب = ج (۳) ا = ب = ج

مثال ۶ کی طرح منحنی ایک بیضوی اور ایک لامتناہی شاخ پر مشتمل ہے، صرف بیضوی حلقہ شاخ کے بائیں جانب واقع ہے۔ جب، ا = ب تو بیضوی گھٹکر ایک تنہا نقطہ (ا، ۰) پر رہ جاتا ہے، جب، ا = ب = ج تو منحنی نیم کعبی مکافی ہو جاتا ہے جہاں (ا، ۰) اس کا قرن ہے۔ عام صورت میں جبکہ ا، ب، ج باہم نامساوی ہوں رقبہ ابتدائی تکملوں کی رقوم میں نہیں بیان کیا جاسکتا۔

۹۔ منحنی ما^۲ (۱ - لا) = لا^۲ (۱ + لا) کو مرتسم کرو (۱) اسکے حلقہ کا رقبہ (۲) منحنی اور متقارب کے درمیان کا رقبہ معلوم کرو۔ شکل ۱۰

شکل ۱۰

اس منحنی کا ڈھال صفر ہے جبکہ لا، (۱ ± √۵) ۱/۲ کے مساوی ہو لیکن لا = (۱ + √۵) ۱/۲ کے لئے ما خیالی ہوتا ہے۔

۱۰۔ ایک منحنی کی مساوات ما^۲ (۲ا - لا) = لا^۳ ہے، اس منحنی اور اس کے متقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو شکل ۱۱

شکل ۱۱

نیز اس منحنی کو اس کے متقارب کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکا حجم دریافت کرو۔

اگر ن ل متقارب پر عمود ہو تو حجم مطلوبہ ہے

$$۲ \int \pi \, \overline{\text{ن ل}}^۲ \, د\text{ما} = ۲\pi \int_{۰}^{\infty} (۲ا - \text{لا})^۲ \, د\text{ما}$$

تکمل کرنے کے لئے لکھو

$$\text{لا} = ۲ا \, \text{جب}^۲ \text{ط} \quad \text{تب،} \quad \text{ما} = \frac{۲ا \, \text{جب}^۳ \text{ط}}{\text{جم ط}}$$

اور $\frac{\pi}{2}$ اور طہ کے حدود ہیں۔

۱۱- منحنی لا ما^2 = ا^2 (ا - لا) اور اس کے متقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو، نیز منحنی کے متقارب کے گرد گردش کرنے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔

۱۲- منحنی ما^2 (ا^2 + لا^2) = لا^2 (ا^2 - لا^2) کے حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۳- ایک ربع دائرہ کا نصف قطر ا ہے، اس کے سروں پر مماس کھینچے گئے ہیں، قوس ربع اور مماسوں کے درمیان جو شکل بنتی ہے اسکو ایک مماس کے گرد پھرانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم دریافت کرو۔

۱۴- ایک قوس دائرہ جس کا نصف قطر ا ہے اپنے وتر کے گرد گھوم کر ایک مجسم پیدا کرتی ہے، اگر قوس کا طول ۲ ا عہ ہو تو ثابت کرو کہ مجسم کا حجم

۲ π ا^3 (جب عہ - $\frac{1}{3}$ جب^3 عہ - عہ جم عہ) ہے اور مجسم کی سطح ۴ π ا^2 (جب عہ - عہ جم عہ) ہے۔

۱۵- اگر منحنی ا$^{ن-1}$ ما = لا^ن کی قوس کا طول س ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{د س}{د لا} = \frac{1}{ا^{ن-1}} \sqrt{ن^2 لا^{2ن-2} + ا^{2ن-2}}$$

دکھاؤ کہ قوس کا طول ابتدائی تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے جبکہ ن ذیل کی کسی صورت کا ہو $\frac{2ک+1}{2ک}$ یا $\frac{2ک}{2ک-1}$ جہاں ک کوئی عدد صحیح ہے مثبت یا منفی۔

۱۶- $\frac{4}{(ما^2 + لا^2)}$ ... کی ترسیم اور محور لا کے درمیان کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۷- منحنی $\left(\frac{لا}{ا}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ما}{ب}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ سے جو کل رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔

رکھو لا = ا جب^3 طہ، تب ما = ب جم^3 طہ اور رقبہ ہے

$$4 \int_0^ا ما\, د لا = 12\, ا ب \int_0^{\frac{\pi}{2}} جب^2 طہ\, جم^4 طہ\, د طہ = \frac{3}{8} \pi\, ا ب$$

۱۸۔ خط تدویر ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۳۷)

لا = ا (طہ ۔ جب طہ)، ما = ا (۱ ۔ جم طہ)

(۱) منحنی کے ایک محراب اور محور لا کے درمیان کا رقبہ معلوم کرو۔

(۲) محراب کا طول طہ = ۰ سے طہ = ۲ط تک دریافت کرو۔

(۳) محراب کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔

(۴) محراب کو اس کے رأس پر کے مماس کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو (رأس پر طہ = ط)

یہاں ∫ ما د لا = ا^۲ ∫ (۱ ۔ جم طہ)^۲ د طہ، $\frac{\text{د س}}{\text{د طہ}}$ = ۲ ا جب $\frac{\text{طہ}}{۲}$

۱۹۔ اس چار سطحی کا حجم معلوم کرو جو محددوں کی سطوح مستویہ اور مستوی

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ + $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ + $\frac{\text{ی}}{\text{ج}}$ = ۱ سے بنتی ہے۔

۲۰۔ لا = ۰ اور لا = ا کے درمیان اس مجسم کا حجم معلوم کرو جسکی مساوات

ی^۲ + $\frac{\text{ا}^۲ \text{ما}^۲}{\text{لا}^۲}$ = ج^۲ ہے۔ اس مجسم کو ہم "مخروط فانہ" کہینگے۔

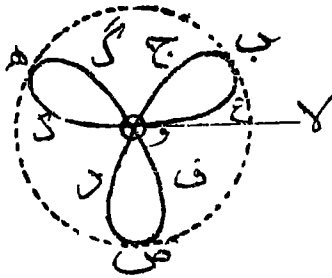
۲۱۔ منحنی لا^{۲/۳} + ما^{۲/۳} = ا^{۲/۳} کا محیط دریافت کرو۔

اگر لا = ا جب^۳ طہ، تب ما = ا جم^۳ طہ اور $\frac{\text{د س}}{\text{د طہ}}$ = ۳ ا جب طہ جم طہ

محیط ہے ۴ $\int_0^{\text{ط}/۲}$ ۳ ا جب طہ جم طہ د طہ = ۶ ا

۲۲۔ مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ اسکا قطب ہو ر (۱ + ز جم طہ) = ل ہے۔ (۱) مکافی (۲) ناقص کی صورت میں وہ رقبہ معلوم کرو جو ابتدائی خط، منحنی اور سمتی قطر طہ = ع کے درمیان گھرا ہوا ہے (ع < ط)

۲۳۔ دکھاؤ کہ منحنی ر = ا جب ۲ طہ میں مساوی رقبہ کے تین حلقے ہیں

جو سب کے سب نصف قطر ا کے دائرہ کے اندر واقع ہیں، ایک حلقہ کا رقبہ دریافت کرو۔
جیسے طھ صفر سے $\frac{\pi}{3}$ تک بڑھتا ہے
مرتسم نقطہ حلقہ و ع ب ج و
مرتسم کرتا ہے۔

جب، طھ قیمت $\frac{\pi}{3}$ سے $\frac{2\pi}{3}$
تک بڑھتا ہے تو ر منفی ہوتا ہے اور
مرتسم نقطہ حلقہ و د ص ف

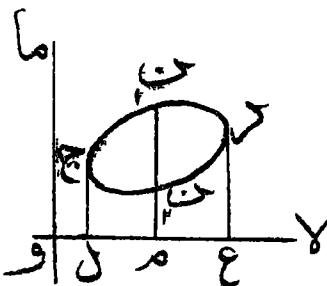
شکل ۱۲

کو مرتسم کرتا ہے، جیسے طھ $\frac{2\pi}{3}$ سے π تک بڑھتا ہے ر مثبت ہوتا ہے اور نقطہ حلقہ و گ ھ ک کو پیدا کرتا ہے۔ طھ کے اس سے زیادہ بڑھنے سے کوئی نئی قوس پیدا نہیں ہوتی۔

۲۴ - منحنی ر = ا جب ن طھ کے تمام حلقوں کے اندر جو رقبہ گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو جبکہ (۱) ن طاق عدد صحیح ہو (۲) ن جفت صحیح ہو۔

۲۵ - منحنی ر۲ جم طھ = ا۲ جب ۳ طھ کے ایک حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۲۶ - منحنی ر۲ جم طھ = ا۲ جم ۲ طھ کے حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۹ - **بند منحنی**۔ فرض کرو کہ ج ح ن د ح ن ۲ ایک منحنی ہے اور ایک خط مستقیم اسکو دو سے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹتا نیز فرض کرو کہ اس کے سب معین مثبت ہیں۔ فرض کرو کہ ل ج ع د اس منحنی کے مماس ہیں جو محور ما کے متوازی ہیں۔ نیز و ل = ا
اور و ع = ب
جس رقبہ کا منحنی احاطہ کرتا ہے وہ ہے

$$\int_{ا}^{ب} ما_{۱}\, فرلا - \int_{ا}^{ب} ما_{۲}\, فرلا \qquad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

شکل ۱۳

جہاں ما۱ اور ما۲ بالترتیب

ج ن، کرا اور ج ن، کر پر انکی سمتوں میں حرکت کرتے ہیں جیسے
لا، ا سے ب تک بڑھتا ہے۔
تکملے (۱) اس طرح بھی لکھے جا سکتے ہیں

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{م ن}_۱ \,\text{فرلا} + \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{م ن}_۲ \,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اب فرض کرو کہ اس منحنی پر کے کسی نقطہ کے محدد لا، ما ایک تیسرے متغیر (مثلاً ت)
کے تفاعلوں کے طور پر بیان ہو سکتے ہیں اور یہ متغیر ایسا ہے کہ جیسے ت، ت۱ سے
ت۲ تک بڑھتا ہے، نقطہ (لا، ما) منحنی کے گرد پورا سفر کر جاتا ہے۔ فرض کرو کہ جیسے
ت، ت۱ سے ت۰ تک بڑھتا ہے نقطہ (لا، ما) براستہ قوس ج ن۱ د ج سے د تک
سفر کرتا ہے اور جب ت، ت۰ سے ت۲ تک بڑھتا ہے تو نقطہ (لا، ما) د سے ج تک براستہ
قوس د ن۲ ج سفر کرتا ہے۔ مثلاً ہم ت کو منحنی کی قوس فرض کر سکتے ہیں جیسے
ج سے ناپنا شروع کیا جاتا ہے، پس اس مفروض کے مطابق
ت۱ = ۰، ت۰ = قوس ج ن۱ د، ت۲ = کل محیط
اگر ت کو تکمل کا متغیر قرار دیا جائے تو (۲) ہو جائیگا

$$\int_{\text{ت}_۱}^{\text{ت}_۰} \text{م ن}_۱ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{فرت} + \int_{\text{ت}_۰}^{\text{ت}_۲} \text{م ن}_۲ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{فرت} \quad \ldots\ldots (۳)$$

(۳) میں دوسرا تکملہ منفی ہے کیونکہ م ن۲ مثبت ہے اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ منفی ہے جیسے
ت، ت۰ سے ت۲ تک بڑھتا ہے۔ جب، ت منحنی کی قوس کو تعبیر کرے
تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ اس زاویہ کی جیب التمام ہوتی ہے جو (لا، ما) پر کا مماس محور لا
کے ساتھ بناتا ہے۔ یہ زاویہ ایسے ناپا جاتا ہے جیسے دفعہ ۹۲ حصۂ اول میں۔ ہم (۳)
کے دو تکملوں کو ایک تکملہ میں لکھ سکتے ہیں، اس طرح بند منحنی کے رقبہ کے لئے جملہ
حاصل ہوتا ہے

$$\int^{ت} ما \frac{فرلا}{فرت} فرت \quad .... (۴)$$

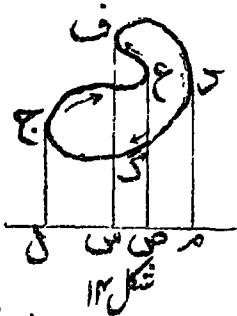
بطور مثال کے فرض کرو کہ ج ن د ن، ناقص ہے

$$\frac{(لا - ھ)^2}{عا^2} + \frac{(ما - ک)^2}{با^2} = ۱$$

رکھو لا = ھ ـ عا جم ت، ما = ک + با جب ت

جب، ن صفر سے ۲ π تک بدلتا ہے تو نقطہ (لا، ما) منحنی کے گرد سمت ج ن د ن، میں سفر کرتا ہے، رقبہ

$$= \int^{۲\pi} (ک + با جب ت) عا جب ت فرت = عا با \int^{۲\pi} جب^2 ت فرت$$

$$= \pi \, عا \, با$$

یہ قید کہ خط مستقیم منحنی کو دو سے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹتا با آسانی ہٹا دی جا سکتی ہے۔
مثلاً جب نقطہ (لا، ما) منحنی پر تیروں کی سمت میں حرکت کرتا ہے تو نقطہ کا معین یہ رقبہ عبور کرتا ہے

شکل ۱۴

ل ج ع ص ـ س ف ع ص + س ف د م ـ ل ج گ د م

جو صریحاً منحنی سے گھرے ہوئے رقبہ کے مساوی ہے۔ قوس ع ف، د گ ج پر $\frac{فرلا}{فرت}$ منفی ہے، اسلئے متناظر تکملے بھی منفی ہیں، پس رقبوں س ف ع ص، ل ج گ د م کے پہلے منفی علامت لکھی گئی ہے۔

ہم (۱) کو اس طرح بھی لکھ سکتے تھے ـ $\int_{ب}^{ب} م(ن)_1 \, فرلا - \int_{ب}^{ب} م(ن)_2 \, فرلا$

اگر نقطہ (لا، ما) منحنی کے گرد سمت ج ن ک ر ن میں محیط پر سے پورا حرکت کر جائے جبکہ ت، تَ سے تہ تک بڑھے تو منحنی کا رقبہ ذیل کے جملہ سے بھی تعبیر ہوگا۔

$$-\int_{\text{ت}}^{\text{تَ}} \text{ما}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\ \text{فرت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۴َ})$$

رقبہ جو (۴) یا (۴َ) سے حاصل ہوتا ہے وہ ایک مثبت عدد ہے۔ لیکن اگر ہم رقبہ کو بھی علامت والی مقدار خیال کریں تو تکملہ

$$\int \text{ما}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\ \text{فرت} \quad \ldots\ldots (۵)$$

ہر صورت میں منحنی کے رقبہ کا جبریہ ناپ ہوگا جبکہ اسے منحنی کے محیط کے گردا گرد لیا جائے یعنی ت کے حدود ایسے ہوں کہ نقطہ (لا، ما) ایک دفعہ منحنی کے محیط کے گرد پورا چکر لگا سکے۔ جیسے ہم نے اوپر ضابطے (۴) اور (۴َ) حاصل کئے ہیں بالکل اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ تکملہ

$$\int \text{لا}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\ \text{فرت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

رقبہ کا جبریہ ناپ ہے جبکہ اسے منحنی کے پورا گرد لیا جائے۔

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ جب ت، تَ سے تہ تک بڑھتا ہے تو نقطہ سمت ج ن ک ر ن میں منحنی کے گرد حرکت کرتا ہے اگر اس سمت کے لئے تکملہ (۵) مثبت ہے اور (۶) منفی یعنی

$$\int \text{ما}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\ \text{فرت} = -\int \text{لا}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\ \text{فرت}$$

تو جب نقطہ سمت ج ن ک ر ن میں حرکت کرے گا تو (۵) منفی ہوگا اور (۶) مثبت۔

نقطہ (لا، ما) کی سمت حرکت بالکل اختیاری ہے۔ ریاضی طبعیات میں یہ دستور بن گیا ہے کہ جب ت کے بڑھنے کے ساتھ مشاہدہ کرنے والا منحنی کے محیط کے گرد اس سمت میں حرکت کرے جس میں کہ کل رقبہ اس کے بائیں جانب رہتا ہے تو اس طرح رقبہ کے ناپ کے لئے جو عدد حاصل ہوا اسے مثبت قرار دیتے ہیں۔ اگر ہم یہ دستور اختیار

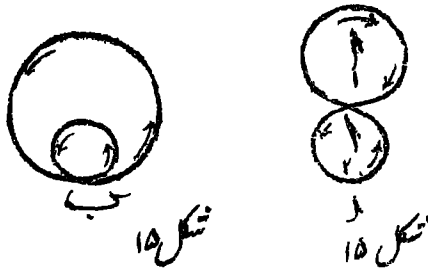
کریں تو بند منحنی کے رقبہ ا کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$ا = \int لا \frac{ور ما}{ور ت} ور ت = - \int ما \frac{ور لا}{ور ت} ور ت = \frac{1}{2} \int \left(لا \frac{ور ما}{ور ت} - ما \frac{ور لا}{ور ت} \right) ور ت \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

جہاں تکملہ تمام منحنی کے گرد اس سمت میں لیا گیا ہے جس میں ت بڑھتا ہے۔ تکملوں (۷) کو اکثر اوقات مختصراً اس طرح لکھتے ہیں۔

$$ا = \int لا \, ور ما = - \int ما \, ور لا = \frac{1}{2} \int (لا \, ور ما - ما \, ور لا)$$

یہ قید کہ سب محدد مثبت ہیں اب دور ہو سکتی ہے۔
جملات (۷) سے ہمیشہ رقبہ کا جبریہ ناپ ملتا ہے۔

شکل ۱۵ ا شکل ۱۵ ب

پس مذکورہ بالا دستور کو ہم آئندہ کے لئے مان لیتے ہیں، اس طرح رقبہ کی مثبت سمت ہمیشہ کے لئے متعین ہو جاتی ہے یعنی ا کی قیمت جو (۷) سے معلوم ہوتی ہے اسکی علامت مثبت ہوگی سمت ج ن، د ن، کے لئے اور منفی ہوگی ج ن، د ن، کے لئے۔

اس مسئلہ میں وہ صورتیں بھی شامل ہیں جن میں منحنی اپنے آپ کو کاٹتا ہے۔ مثلاً اگر نقطہ اوپر والی شکل پر تیروں کی سمت میں حرکت کرے تو تکملہ (۷)، $ا_۱ - ا_۲$ کے مساوی ہوتا ہے۔ دوسری شکل کے لئے تکملہ سے دونوں حلقوں کے رقبوں کا مجموعہ حاصل ہوگا کیونکہ منحنی کے گرد جانے میں اندرونی حلقہ کا رقبہ دو بار شریک ہوتا ہے۔

۲۰ - رقبہ جو ایک متحرک خط مستقیم اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اب خط مستقیم ہے جس کا طول ل ہے اور اس کو نزدیک کے مقام اَبَ میں ہٹا دیا گیا ہے، اپنی حرکت میں یہ خط رقبہ اب بَ اَ عبور کرتا ہے۔ یہ رقبہ مثبت ہوگا اگر محیط کے گرد سمت اب بَ اَ میں جانے سے یہ رقبہ مشاہد کے بائیں جانب رہے اور منفی ہوگا اگر یہ دائیں جانب رہے۔

اج کو اَبَ کے اور بَج کو وتر اَ اَ کے متوازی کھینچو۔ فرض کرو کہ اَلا ایک ثابت خط کے متوازی ہے اور زاویے لااب، ج اَبَ بالترتیب عـا اور مفـ عـا ہیں۔

شکل ۱۷

صغاریات کے پہلے رتبہ تک رقبہ اب بَ اَ (مفـ ئـا) متوازی الاضلاع اَج اور مثلث اَج بَ کے مجموعے کے مساوی ہے۔

اب کی حرکت دو حرکتوں سے مرکب ہے۔

(۱) حرکت انتقالیت اَج تک۔

(۲) گھماؤ کی حرکت اَ کے گرد مقام اَبَ تک۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع کا ارتفاع ف ہے، صغاریات کے پہلے رتبہ تک

$$\text{مفـ ئـا} = \text{ل ف} + \tfrac{1}{2}\,\text{ل}^2\,\text{مفـ عـا} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

فرض کرو کہ اب میں کوئی ثابت نقطہ ن ہے۔

$$\text{ان} = \text{ر} = \text{اَنَ} = \text{اَنَ}$$

اب کی سمت کے عمود وار ن کا جو ہٹاؤ ہے اس پر غور کرو۔

حرکت نقل کے لئے عمودی ہٹاؤ ف ہے (نہ کہ ن نَ)، گھماؤ کی حرکت کے لئے ہٹاؤ ر فـ عـا ہے۔ ن کا کل عمودی ہٹاؤ فرض کرو فـس ہے۔

$$\text{فرس} = \text{ف} + \text{ا}\,\text{فرعہ} \quad \ldots\ldots (۲)$$

(۲) سے ف = فرس - ا فرعہ، اس کی وجہ سے (۱) ہو جاتا ہے

$$\text{فری} = \text{ل}\,\text{فرس} + \left(\tfrac{1}{2}\text{ل}^2 - \text{ا ل}\right)\text{فرعہ} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اگر متغیروں کو ت کے تفاعل فرض کیا جائے جیسا دفعہ ۱۹ میں تو

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \text{ل}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} + \left(\tfrac{1}{2}\text{ل}^2 - \text{ا ل}\right)\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

مساوات (۴) بالکل عام ہے بشرطیکہ متغیروں کو مناسب علامات دی جائیں۔

فرس، $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ دونوں مثبت ہونگے جبکہ حـ کی حرکت ایک ایسے مشاہد کے بائیں طرف ہو جو اب کی سیدھ میں ا سے ب کی طرف دیکھ رہا ہو۔ مثبت گھماؤ عہ، مخالف سمت ساعت ہوگی۔ مستقل ا مثبت ہوگا جبکہ حـ اب پر واقع ہو یا اب ممدودہ پر جبکہ اسے حب میں سے خارج کیا جائے اور منفی ہوگا جبکہ یہ حب ا ممدودہ پر ا سے پرے واقع ہو۔

جیسے ت، ت_1 سے ت_2 تک بڑھتا ہے، اب کا رقبہ عبور کردہ

$$\text{ی} = \text{ل}\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2}\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\,\text{فرت} + \left(\tfrac{1}{2}\text{ل}^2 - \text{ا ل}\right)\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2}\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرت}}\,\text{فرت}$$

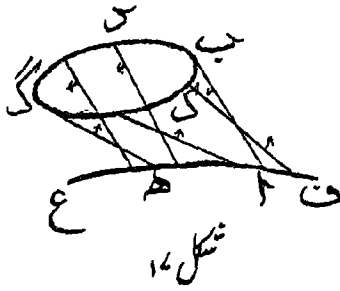
$$= \text{ل}\,\text{س} + \left(\tfrac{1}{2}\text{ل}^2 - \text{ا ل}\right)\left(\text{عہ}_2 - \text{عہ}_1\right) \quad \ldots\ldots (۵)$$

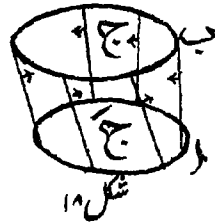
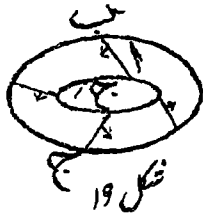
جہاں س اثنائے حرکت میں حـ کا کل عمودی ہٹاؤ ہے اور عہ_1، عہ_2 زاویہ عہ کی ابتدائی اور آخری قیمتیں ہیں۔ س بالعموم وہی نہیں ہوتا جو حـ کے طریق کا طول ہے۔

اب فرض کرو کہ حـ ایک بند منحنی ج مرتسم کرتا ہے، اس منحنی کا رقبہ بھی ج ہے۔

(۱) جب ب نخنی ج کا پورا چکر لگاتا ہے تو فرض کرو کہ ا قوس ع ف پر آگے پیچھے حرکت کر کے اپنے ابتدائی مقام پر آجاتا ہے جبکہ ب اپنے ابتدائی مقام پر آجائے۔ پس (۵) میں عہ = عہ اور یہ محض ج کے مساوی ہے۔ اس طرح

شکل ۱۷

ج = ل س .... (۶)

جہاں س، ب ن کا کل عمودی ہٹاؤ ہے، کیونکہ صریحاً تکملہ (۵) رقبہ ا ب ک گ ھ۔ رقبہ ا ب ک گ ھ کو تعبیر کرتا ہے۔ اس صورت میں س، ا پر منحصر نہیں یعنی ا ب پر جو ن کا مقام ہے س اس پر منحصر نہیں ہے۔

(۲) دوسری صورت میں فرض کرو کہ جب ب، ج کے محیط کا پورا چکر لگاتا ہے تو ا ایک بند نخنی ج کے گرد پورا دور کر جاتا ہے۔

شکل ۱۹

شکل ۱۸

اگر ج، ج کے باہر ہو (شکل ۱۸) تو عہ اور عہ باہم مساوی ہونگے، مساوات (۵) کا بایاں رکن ل س ہوگا، لیکن ا ب کا عبور شدہ رقبہ ج - ج ہوگا پس ج - ج = ل س .... (۷)

لیکن اگر ج، ج کا پورا احاطہ کرلے (شکل ۱۹) تو عہ - عہ = ۲π

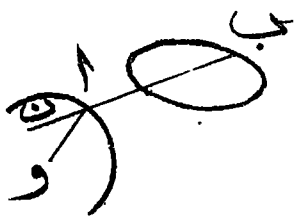
اس لئے جَ - جَ = ل س + ۲ π (½ لَ - ا ل) ....(۸)

اعداد جَ جَ کی علامتیں دفعہ ۱۹ (۷) کے دستور کے موافق حاصل ہوتی ہیں۔

۲۱۔ **سطح پیما**۔ بند منحنی کا حیلی طریق پر رقبہ نکالنے کے لئے بہت سے آلات ایجاد کئے گئے ہیں۔ مذکورہ بالا دو دفعات میں اجمالی طور پر وہ اصول بتائے گئے ہیں جن پر ایسے بہت سے آلات کی بناوٹ مبنی ہوتی ہے۔ سب سے مشہور ایمسلر کا قطبی سطح پیما ہے جس کی بناوٹ کا مختصر ذکر یہاں کیا جائے گا۔

قطبی سطح پیما میں دو سلاخیں و ا اور ا ب ہوتی ہیں جو ا پر آزادانہ طریق سے جڑی ہوئی ہوتی ہیں، سلاخ و ا ایک ثابت نقطہ و کے گرد گھومتی ہے۔ اگر ب ایک بند منحنی کو مرتسم کرے تو ا ایک دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے۔ جب ا صرف دائرہ کے محیط پر آگے پیچھے حرکت کرے اور پورا چکر نہ لگائے تو جب بند منحنی کے محیط پر ب گردش کرتا ہے اس کا رقبہ بموجب دفعہ ۲۰ (۶) ل س ہوتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ ا ب پر جو ن کا مقام ہے س اس پر منحصر نہیں ہوتا۔

س کو معلوم کرنے کے لئے ایک پہیّہ جس کا محور ا ب کے متوازی ہوتا ہے ا ب کے ساتھ لگا ہوا ہوتا ہے۔ جیسے ب منحنی کے محیط پر حرکت کرتا ہے یہ پہیّہ کچھ پھسلتا ہے اور کچھ لڑکتا ہے۔ پھسلنے اور لڑکنے کی حرکتیں باہم بے تعلق ہوتی ہیں یعنی پھسلنے کے وقت پہیّہ محور کے گرد نہیں پھرتا۔ پس ن کا عمودی ہٹاؤ = پہیّہ کا محیط ۲ π ر × ان گردشوں کی تعداد جو بند منحنی کے گرد ب کی اثنائے حرکت میں پہیہ لگاتا ہے۔

یعنی س = ۲ π ر ن

شکل ۲۰

ایک تحنی پر ن کی قیمت خود بخود درج ہوتی جاتی ہے، ن صحیح یا کسر ہوسکتا ہے۔
اگر ہم تحنی ج کو اتنا بڑا فرض کریں کہ و ا نصف قطر والا دائرہ بالکل اس کے اندر واقع ہو تو بموجب دفعہ ۲۰ (۸)

$$\text{ج} - \pi\,\text{و ا}^2 = \text{ل س} + 2\pi\left(\tfrac{1}{2}\text{ل}^2 - \text{ا ل}\right)$$

یعنی $\text{ج} = 2\pi\,\text{ل ر ن} + 2\pi\left(\tfrac{1}{2}\text{ل}^2 - \text{ا ل}\right) + \pi\,\text{و ا}^2$ کیونکہ $\text{س} = 2\pi\,\text{ر ن}$
اس جملہ میں سوائے ن کے اور سب اعداد آلہ کے مستقلات ہیں۔ اس مضمون پر مزید معلومات کے لئے ملاحظہ ہو ھنرسی کی "رپورٹ سطح پیماؤں پر" برٹش ایسوسی ایشن رپورٹ ۱۸۹۴ء۔

دفعات ۱۹، ۲۰ کا طریق ثبوت فی الحقیقت ایپل (Appell) کا ہے جو اس نے اپنی کتاب مبادیات ریاضی تحلیل Elements d' Analyse Mathematique میں دیا۔

مشق ۷

۱۔ ثابت کرو کہ قطبی محددوں میں ایک بند تحنی کا رقبہ تکملہ

$$\frac{1}{2}\int \text{ر}^2 \frac{\text{و طہ}}{\text{و ت}}\,\text{و ت}$$

سے حاصل ہوتا ہے جبکہ تکملہ کو پورے محیط کے گرد لیا جائے، اس نتیجہ کو ثابت کرو
(۱) رقبہ دریافت کرنے کے لئے جو قطبی ضابطہ ہے اسے استعمال کرنے سے
(۲) دفعہ ۱۹، (۷) میں جو آخری تکملہ ہے اسمیں لا = ر جم طہ، ما = ر جب طہ رکھکر تبدیل کرنے سے۔ [دیکھو مشق ۱۲، سوال ۱۵ حصۂ اول]

۲۔ مثلث و ا ب کے راسوں کے محدد و ترتیب و، ا، ب میں بالترتیب (۰، ۰)، (لا، ما)، (لا + مف لا، ما + مف ما) ہیں، ہندسی طریق سے ثابت کرو کہ بلحاظ علامت اور مقدار مثلث کا رقبہ $\tfrac{1}{2}(\text{لا مف ما} - \text{ما مف لا})$ ہے۔
اس نتیجہ کی مدد سے مثال ماقبل کا مسئلہ حاصل کرو۔

۳۔ مکافیات $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا لا}$، $\text{لا}^2 = 4\,\text{ا ما}$ کا مشترک رقبہ معلوم کرو۔

۴۔ متقارب ما = ا، محور ما اور منحنی $\text{ما}^2(\text{ا}^2 + \text{لا}^2) = \text{ا}^2\text{لا}^2$ کی اس شاخ کے

درمیان جو ربع اول میں ہے جو رقبہ گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو۔

یہ رقبہ ہے $\lim_{ب \to \infty} \int^{ب} (ا - ما) \, فرلا = ا^۲ + \lim_{ب \to \infty} ا\{ب - \sqrt{ا^۲ + ب^۲}\} = ا^۲$

لحاظ ما کے تکمل کرنے سے رقبہ معلوم کرو۔

۵۔ "لنگر چھلا" وہ مجسم ہے جو ایک دائرہ کو اس کی سطح میں کے ایک خط مستقیم کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ا ہے گردش کا محور، محور ما ہے اور دائرہ کا مرکز محور لا پر مبدأ سے فاصلہ ج پر واقع ہے، دائرہ کے کسی نقطہ کے محدد ہیں

$$لا = ج + ا جم ت ، \quad ما = ا جب ت$$

اگر لنگر چھلے کا جحم ح ہو اور سطح س تو ثابت کرو کہ جس صورت میں ج ≤ ا

$$(۱) \quad ح = \pi \int^{\pi ۲} (ج + ا جم ت)^۲ ا جم ت \, فرت = ۲\pi^۲ ا^۲ ج = ق ل$$

$$(۲) \quad س = ۲\pi \int^{\pi ۲} (ج + ا جم ت) ا \, فرت = ۴\pi^۲ ا ج = ط ل$$

جہاں ق دائرہ معلومہ کا رقبہ ہے اور ط محیط اور ل اُس دائرہ کا محیط (۲ π ج) ہے جو گردش کرنے والے دائرہ کا مرکز مرتسم کرتا ہے۔

۶۔ منحنی ر = ۳ + ۲ جم طا میں ایک ہی بیضوی حلقہ ہے۔ منحنی کو مرتسم کرو اور اسکا رقبہ معلوم کرو۔

۷۔ منحنی ر = ۲ + ۳ جم طا دو بیضوی حلقوں پر مشتمل ہے (شکل ۲۱)

اگر جم عا = $-\frac{۲}{۳}$ (۰ < عا < π) تو ثابت کرو کہ بڑے حلقہ کا رقبہ ہے

$$ا = \frac{۱۷}{۲} عا + ۱۲ جب عا + \frac{۹}{۲} جب عا جم عا$$

اور چھوٹے بیضوی کا رقبہ ہے $\frac{۱۷}{۲} \pi - ا$

نیز ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۲}$ ر^۲ کا تکملی حدود

طا = ۰ اور طا = ۲ π

کے درمیان ان دو رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

شکل ۲۱

اشلہ ۲، سے منحنی ر = ا + ب جم طہ کی نوعیت کا پتہ چلتا ہے جبکہ ا > ب اور ا < ب۔

۸۔ بتاؤ مساوات ف (م لا، ن ما) = ۰ والا منحنی جہاں م، ن مستقل ہیں ف (لا، ما) = ۰ سے کیسے حاصل ہو سکتا ہے۔ اگر دوسرا منحنی بند حلقہ ہو تو پہلا بھی بند ہوگا اور ف (م لا، ن ما) = ۰ کا رقبہ ف (لا، ما) = ۰ کے رقبہ کے مساوی ہوگا جبکہ موخرالذکر کو م ن پر تقسیم کر دیا جائے۔

فرض کرو کہ م لا = لاَ، ن ما = ماَ، اس لئے لاَ ق ماَ = م ن لا ق ما
اب دفعہ ۱۹ (۷) کو استعمال کرو۔ لاَ ق ماَ کا تکملہ منحنی ف (لاَ، ماَ) = ۰ کے اگرد (جو وہی بات ہے کہ لا ق ما کا تکملہ منحنی ف (لا، ما) = ۰ کے گرد) مساوی ہوگا م ن لا ق ما کے تکملہ کے جبکہ اسے منحنی ف (م لا، ن ما) = ۰ کے گرد لیا جائے یعنی لا ق ما کا تکملہ منحنی ف (لا، ما) = ۰ کے گرد مساوی ہے اس رقبہ کا م ن گنا جو منحنی ف (م لا، ن ما) = ۰ سے گھرا ہوا ہے (کیونکہ م ن مستقل ہے اور لا ق ما کا تکملہ رقبہ ہے)

۹۔ مشق ۶ مثال ۵ پر مثال بالا کا طریقہ استعمال کرنے سے منحنی

(م² لا² + ن² ما²)² = ا² لا² + ب² ما²

کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۰۔ جب، اب (دفعہ ۲۰) ایک گردش پوری کرتا ہے تو ن ایک ایسا منحنی مرتسم کرتا ہے جس کا رقبہ جَ ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

(۱)　جَ = (ا ج + ب جَ) / (ا + ب) − π ا ب

جہاں ان ب = ب اور ا، ج، جَ سے وہی مقداریں تعبیر ہوتی ہیں جن کا دفعہ ۲۰ میں ذکر ہوا۔

نیز ثابت کرو کہ اگر سرے ا، ب ایک بند بیضوی منحنی ج پر حرکت کریں تو

(۲)　ج − جَ = π ا ب　[ہولڈج کا مسئلہ]

مساوات (۸) دفعہ ۲۰ کو استعمال کرو۔ رکھو ل = ا + ب، اس طرح ج - جً حاصل ہوگا، پھر رکھو ل = ا، جس سے جٌ - جَ حاصل ہوتا ہے۔ س کو ساقط کرنے سے نتیجہ (۱) حاصل ہوگا۔ (۲) حاصل کرنے کے لئے ان اور ب ن کے عبور کردہ رقبوں پر غور کرو۔

باب سوم

تکملہ مجموعہ کی انتہا خیال کیا جاسکتا ہے

دوہرے تکملے

۲۲۔ تکملہ ایک مجموعہ کی انتہا ہے۔ تکملہ کو ایک مجموعہ کی انتہا سمجھنا بعض مسائل میں علم آموز ہونے کے علاوہ ضروری ہوتا ہے، $\text{فا}(\text{لا})$ حسب معمول مسلسل خیال کیا جائیگا۔

ابتدا میں فرض کرو کہ $\text{ا} < \text{ب}$ اور $\text{فا}(\text{لا})$ ایک مثبت بڑھنے والا تفاعل ہے، بعد میں ان قیود کو ہٹا دیا جائیگا۔ ا اور ب کے درمیان صعودی ترتیب میں $(\text{ن}-۱)$ قیمتیں $\text{لا}_۱$، $\text{لا}_۲$، $\text{لا}_۳$، ...... $\text{لا}_{\text{ن}-۱}$ مندرج کرو اور ن فرقوں $(\text{لا}_۱-\text{ا})$، $(\text{لا}_۲-\text{لا}_۱)$، $(\text{لا}_۳-\text{لا}_۲)$، ...... $(\text{ب}-\text{لا}_{\text{ن}-۱})$ کو محسوب کرو۔ ان سب فرقوں کی ایک ہی علامت ہے، اس صورت میں مثبت ہے اور ان کا مجموعہ $\text{ب}-\text{ا}$ ہے، واضح ہو کہ وقفہ $\text{ب}-\text{ا}$ کو ن ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اب ہر ذیلی وقفہ کو $\text{فا}(\text{لا})$ کی اس قیمت کے ساتھ ضرب دو جو اس وقفہ کی ابتدا میں ہے، اس طرح جو ن حاصل ضرب حاصل ہونگے ان کو جمع کرنے سے

$$\text{فا}(\text{ا})(\text{لا}_۱-\text{ا})+\text{فا}(\text{لا}_۱)(\text{لا}_۲-\text{لا}_۱)+\text{فا}(\text{لا}_۲)(\text{لا}_۳-\text{لا}_۲)+\ldots+\text{فا}(\text{لا}_{\text{ن}-۱})(\text{ب}-\text{لا}_{\text{ن}-۱}) \quad \ldots\ldots\ldots(۱)$$

یا فرقوں کی معمولی ترقیم $\text{مف}\,\text{ا}$، $\text{مف}\,\text{لا}_۱$، .... کے مطابق

فا(ا) مف ا + فا(لا$_1$) مف لا$_1$ + فا(لا$_2$) مف لا$_2$ +.....+ فا(لا$_{ن-1}$) مف لا$_{ن-1}$ .... (ا)

مجموعہ (ا) زیادہ برجستہ شکل میں اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sum_{لا=ا}^{لا=ب}$$ فا(لا) مف لا .... (۲)

علامت $\sum$ فا(لا) مف لا سے مراد ہے "اُن سب رقموں کا مجموعہ جو اس نمونہ فا(لا) مف لا کی ہوں" اس کو ہم پڑھینگے "حاصل جمع یا $\sum$ فا(لا) مف لا"۔ محض اس علامت سے پورا معلوم نہیں ہوتا کہ وقفہ ب - ا کس طرح تقسیم کیا گیا ہے، یہ عبارت یا سوال کے عمل سے معلوم کرنا چاہئے۔ وقفہ کے جس سرے سے تقسیم شروع ہوتی ہے اُسے "لا = ا" سے ظاہر کرتے ہیں اور دوسرے سرے کو "لا = ب" سے۔ ہر فرق مف لا کی وہی علامت ہے جو ب - ا کی جو اس صورت میں مثبت ہے۔

ہم مجموعہ (ا) یا (۲) کی انتہا معلوم کرنا چاہتے ہیں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھایا جائے۔ ظاہر ہے کہ ن کو لا انتہا بڑھانے کا نتیجہ یہ ہوگا کہ فرق مف ا، مف لا$_1$ .... لا انتہا کم ہو جائینگے۔ یہ انتہا معلوم کرنے کے لئے فا(لا) کی ترسیم (شکل ۲۲) پر غور کرو۔

فرض کرو کہ و ل = ا، و ل$_1$ = لا$_1$ ...... و م = ب

تب ل ع = فا(ا)، ل$_1$ ع$_1$ = فا(لا$_1$) ..... ل$_{ن-1}$ ع$_{ن-1}$ = فا(لا$_{ن-1}$)، م ط = فا(ب)

شکل ۲۲

ع د، ع د، ..... ع د محور لا کے متوازی ہیں۔

صریحاً حاصل جمع (۱) مستطیلوں ل د، ل د، ل د ..... ل د کے رقبوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے

مستطیلوں کا یہ رقبہ، رقبہ ل م ط ع سے کم رہتا ہے بقدر ذیل کے کروی مثلثات کے مجموعہ کے ع د ع، ع د ع، ..... ع د ط۔

ع د کو ل م کے متوازی کھینچو، یہ خط م ط کو د پر کاٹتا ہے۔ ع د کو ف تک اتنا خارج کرو کہ د ف ذیلی وقفوں ل ل، ل ل، ..... میں سے سب سے بڑے کے مساوی ہو۔ مستطیل د ف گ ط کی تکمیل کرو۔

فرض کرو کہ رقبہ ل م ط ع ی سے تعبیر ہوتا ہے، تب ی اور مجموعہ (۱) کا فرق کم ہے ذیل کے ن مستطیلوں کے مجموعہ سے

ع د × د ع، ع د × د ع، ..... ع د × د ط

یعنی کم ہے مستطیل د ف (د ع + د ع + ... + د ط) سے

یعنی کم ہے د ف × د ط سے

یعنی کم ہے د ف {فا (ب) - فا (ا)} سے۔

اگر ن لا انتہا بڑے اور اسی آن میں ہر ذیلی وقفہ لا انتہا کم ہو تو انتہا میں د ف صفر ہوگا اور (۱) کی انتہا ی ہوگی۔ اس لئے

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \sum_{\text{لا}=\text{ا}}^{\text{لا}=\text{ب}} \text{فا (لا) مف لا} = \text{ی} = \text{رقبہ ل م ط ع} \quad \text{.....(۳)}$$

البتہ ہم لکھ سکتے ہیں

$$\sum_{\text{لا}=\text{ا}}^{\text{لا}=\text{ب}} \text{فا (لا) مف لا} = \text{ی} \quad \text{تقریباً}$$

یہ قیود جو ابتدا میں لگائی گئی تھیں کہ فا(لا) مثبت ہے، بڑھنے والا انفاعل ہے اور ا کم ہے ب سے، یہ اب ہٹا دی جا سکتی ہیں۔

اگر ا < ب اور فا(لا) مثبت اور گھٹنے والا انفاعل ہو تو اوپر کے عمل میں تبدیلی صرف اتنی ہوگی کہ یہی مجموعہ (۱) سے کم ہوگا۔ اگر فا(لا) کہیں بڑھتا ہو اور کہیں گھٹتا ہو تو فا(لا) کے بڑھنے اور گھٹنے کی صورتوں کے لئے نتائج کو الگ الگ صحیح تسلیم کر کے عام صورت میں ان کو باہم ملایا جا سکتا ہے۔

اگر ا > ب اور فا(لا) مثبت ہو تو ہر ایک فرق (لا$_1$ - ا)، (لا$_2$ - لا$_1$)...... منفی ہوگا اور اس صورت میں بھی انتہا لینے سے منحنی کا رقبہ معلوم ہوگا مگر اس کی علامت منفی ہوگی۔

آخری صورت میں اگر فا(لا) منفی ہو تو انتہا لینے سے منحنی کا رقبہ ملیگا بشرطیکہ دفعہ ۸۰ حصہ اول کے موافق مناسب علامت منتخب کی جائے۔

اگر ہم چاہیں تو ذیلی وقفوں کو باہم مساوی خیال کر سکتے ہیں، ایسی صورت میں ہر وقفہ $\frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}}$ کے مساوی ہوگا۔ ذیلی وقفوں پر فقط اتنی قید ہے کہ ہر وقفہ کو انتہا میں صفر ہو جانا چاہیے جبکہ ن انتہا میں لامتناہی ہو جائے۔

مجموعہ (۱) میں ہم نے فرض کیا ہے کہ فا(لا) ہر وقفہ میں شروع کی قیمت اختیار کرتا ہے لیکن اگر یہ ہر وقفہ کے آخر کی یا درمیان کی کوئی قیمت اختیار کرے تو بھی دفعہ ۸۸ مسئلہ ۷، حصہ اول کی مدد سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ انتہا وہی رہتی ہے۔

ہم صرف اس صورت پر غور کرتے ہیں کہ ا < ب اور فا(لا) مثبت ہے کیونکہ باقی صورتیں اس سے باآسانی مستنبط ہو سکتی ہیں۔

اگر اَ، لاَ$_1$، لاَ$_2$، ...... لاَ کی قیمتیں ہوں بالترتیب وقفوں (لا$_1$ - ا)، (لا$_2$ - لا$_1$)، (لا$_3$ - لا$_2$)،...... کے آخر یا درمیان میں تو ہم لے سکتے ہیں

ب$_1$ = فا(اَ)(لا$_1$ - ا)، ب$_2$ = فا(لاَ$_1$)(لا$_2$ - لا$_1$)،......

گ$_1$ = فا(ا)(لا$_1$ - ا)، گ$_2$ = فا(لا$_1$)(لا$_2$ - لا$_1$)،.....

اور مسئلہ مذکورہ کے شرائط عائد ہوتے ہیں کیونکہ فا(لا) مسلسل ہے اور ن ← ∞ کے لئے $\frac{ب_١}{گ_١}$، $\frac{ب_٢}{گ_٢}$، ..... میں سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے۔

یہ ثابت کرانے کے بعد کہ (۱) کی انتہا رقبہ ی ہے ہم حسب دفعہ ۸۸ حصۂ اول ثابت کر سکتے ہیں کہ اس انتہا کا مشتق بلحاظ ب کے مط ہے یعنی فا(ب)۔ تکملوں کے متعلق جملہ مسائل مجموعہ (۱) کی انتہا پر استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ اب تکملوں کی عام ترقیم کی وجہ ظاہر ہے، کہ لفظ "مجموعہ" کا ابتدائی حرف میم ہے، اگر یہ یاد رہے کہ تکملہ مجموعہ نہیں ہے لیکن مجموعہ کی انتہا ہے۔ (دیکھو دفعہ ۲۳ مثال ۲)

۲۳۔ مثالیں مثال ۱۔ $\int_{\cdot}^{ب} لا^٢ \, فر لا$ کی قیمت معلوم کرو۔

وقفہ ب کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔ دفعہ ۲۲ کی ترقیم کے مطابق

$$و ل_\cdot = \cdot،\quad و ل_١ = \frac{ب}{ن}،\quad و ل_٢ = \frac{٢ب}{ن}،\ .....\ و ل_{ن-١} = \frac{(ن-١)ب}{ن}$$

مجموعہ (۱) ہو جاتا ہے

$$\cdot \times \frac{ب}{ن} + \left(\frac{ب}{ن}\right)^٢ \frac{ب}{ن} + \left(\frac{٢ب}{ن}\right)^٢ \frac{ب}{ن} + ... + \left\{\frac{(ن-١)ب}{ن}\right\}^٢ \frac{ب}{ن}$$

$$= \frac{ب^٣}{ن^٣}\left\{١^٢ + ٢^٢ + ... + (ن-١)^٢\right\}$$

$$= \frac{ب^٣}{ن^٣} \cdot \frac{(ن-١)ن(٢ن-١)}{٦} \quad یا \quad \frac{ب^٣}{٣}\left\{١ - \frac{٣}{٢ن} + \frac{١}{٢ن^٢}\right\}$$

اور انتہا صریحاً $\frac{ب^٣}{٣}$ ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر دفعہ ۲۲ (۲) میں رکھا جائے فا(لا) = فَ(لا) تو انتہا ف(ب) - ف(ا) ہوگی۔

مشتق کی تعریف کے بموجب

$$\frac{ف(لا + مف لا) - ف(لا)}{مف لا} = فَ(لا) + عـ$$

یعنی ف (لا + مف لا) ۔ ف (لا) = فَ (لا) مف لا + عـہ مف لا

جہاں عـہ، مف لا کے ساتھ معدوم ہو جاتا ہے ۔ .... (ا)

(ا) میں کے لا اور مف لا کو بالتواتر دفعہ ۲۲ کی قیمتیں دو ۔ لا کی تمام قیمتوں کے لئے بالعموم عـہ کی وہی قیمت نہیں ہوگی، اس لئے ہم لاحقے استعمال کرتے ہیں پس

ف (لا۱) ۔ ف (ا) = فَ (ا) مف ا + عـہ۱ مف ا

ف (لا۲) ۔ ف (لا۱) = فَ (لا۱) مف لا۱ + عـہ۲ مف لا۱

ف (لا۳) ۔ ف (لا۲) = فَ (لا۲) مف لا۲ + عـہ۳ مف لا۲

....

ف (ب) ۔ ف (لان-۱) = فَ (لان-۱) مف لان-۱ + عـہن مف لان-۱

جمع کرنے سے ف (ب) ۔ ف (ا) = $\sum_{\text{لا}=\text{ا}}^{\text{لا}=\text{ب}}$ فَ (لا) مف لا + ر

جہاں ر = عـہ۱ مف ا + عـہ۲ مف لا۱ + ... + عـہن مف لان-۱

فرض کرو کہ مقادیر عـہ۱، عـہ۲ ...... میں سے عـہَ تعداداً سب سے بڑا ہے، تب عددی قیمت کے لحاظ سے

ر > عـہَ (مف ا + مف لا۱ + مف لا۲ + ... + مف لان-۱) یا عـہَ (ب ۔ ا)

چونکہ ہر عـہ اور اس لئے ہر عـہَ کی انتہا صفر ہے، اسلئے ر کی انتہا بھی صفر ہوگی پس نتیجہ ثابت ہوتا ہے ۔

مثال ۳ ۔ ن ← ∞ کے لئے

$$\frac{1}{\text{ن}+1} + \frac{1}{\text{ن}+2} + \frac{1}{\text{ن}+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2\text{ن}}$$

کی انتہا معلوم کرو ۔

ہم اس مجموعہ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\text{ن}}}\times\frac{1}{\text{ن}}+\frac{1}{1+\frac{2}{\text{ن}}}\times\frac{1}{\text{ن}}+\frac{1}{1+\frac{3}{\text{ن}}}\times\frac{1}{\text{ن}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{\text{ن}}{\text{ن}}}\times\frac{1}{\text{ن}}$$

یا اس طرح سے $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}}\frac{1}{1+\frac{\text{ر}}{\text{ن}}}\times\frac{1}{\text{ن}}$

تفاعل $\text{فا}(\text{لا})=\frac{1}{\text{لا}}$ پر غور کرو۔ دفعہ ۲۲ میں فرض کرو کہ ہر فرق $\frac{1}{\text{ن}}$ ہے۔ فرض کرو کہ ا = ۱، ب = ۲ اوپر کا مجموعہ اسی طرح کا سلسلہ ہوگا جیسا (۱) دفعہ ۲۲ ہے اگر ہم فا(لا) کی قیمتیں ہر وقفہ کے آخر کی فرض کریں۔

پس مطلوبہ انتہا ہے $\int_1^2\frac{\text{د لا}}{\text{لا}}=\left[\text{لوک لا}\right]_1^2=\text{لوک }2=693$ء

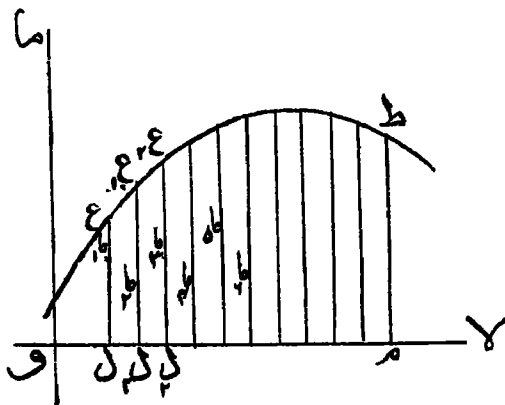
۲۴ - تقربات - تکملہ کی قیمت معلوم کرنے میں بالعموم پہلے وہ تفاعل معلوم کیا جاتا ہے جس کا مشتق معلومہ متکمل ہو۔ اب اگر یہ تفاعل معلوم نہ ہو سکے تو یہ طریقہ ناکام رہیگا۔ ایک مشہور صورت جس میں یہ طریقہ استعمال نہیں ہو سکتا طبیعی مثالوں میں پیدا ہوتی ہے جہاں متکمل کے لئے تحلیلی جملہ معلوم ہونے کی بجائے اس کا گراف معلوم ہوتا ہے اس لئے جب متکمل کی قیمتوں کی صرف محدود تعداد معلوم ہو تو اس صورت میں بھی تکملہ کی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے طریقے ایجاد کئے گئے ہیں یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ متکمل کو ایک مسلسل تفاعل متصور کیا جا سکتا ہے اگرچہ اسکی قیمتوں کی صرف محدود تعداد معلوم ہونے کی وجہ سے تفاعل کے لئے تحلیلی جملہ معلوم نہیں ہو سکتا۔ جو طریقے اب بیان کئے جائینگے وہ تحلیلی شکل کے تفاعلوں کے لئے بھی استعمال ہو سکتے ہیں اگرچہ ایسی صورت میں زیادہ قوی طریقے میسر آ سکتے ہیں بالخصوص سلسلوں میں پھیلانے کا طریقہ۔

فرض کرو کہ ل م کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ہر حصہ ھ کے مساوی ہے۔ نیز فرض کرو، ل، م اور باقی (ن - ۱) نقاط تقسیم پر کے معین ما_1، ما_2، ما_3 .... معلوم ہیں۔

$$\text{تکملہ} \int_{\text{ل}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} \quad .... (1)$$

کے محسوب کرنے سے یہی مراد ہے کہ رقبہ ل م ط ع معلوم کیا جائے [شکل ۲۳] ترسیم کی بجائے فرض کرو کہ کثیر الاضلاع ع ع_1 ع_2 ...... ہے پہلے منحرف کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ھ $(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)$ ہے اور یہ رقبہ، ل م ط ع کے متناظر ٹکڑے کے رقبہ سے بہت تھوڑا کم ہوگا۔ ان سب منحرفوں کو جمع کرنے سے اس رقبہ ل م ط ع کی اور اسلئے تکملہ (۱) کی تقریبی قیمت معلوم ہوتی ہے

$$\text{ق}_1 = \frac{1}{2}\text{ھ}(\text{ما}_1+\text{ما}_2) + \frac{1}{2}\text{ھ}(\text{ما}_2+\text{ما}_3) + ... + \frac{1}{2}\text{ھ}(\text{ما}_{\text{ن}}+\text{ما}_{\text{ن}+1})$$

$$= \frac{1}{2}\text{ھ}\{\text{ما}_1+\text{ما}_{\text{ن}+1} + 2(\text{ما}_2+\text{ما}_3+ ...... + \text{ما}_{\text{ن}})\} \quad ...... (2)$$

اگر ترسیم اپنے طول میں سراسر اوپر کی طرف محدب ہو جیسے شکل ۲۳ میں تو ق اصلی رقبہ سے کم رہے گا اور اگر منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو تو ق رقبہ سے بڑھ جائے گا۔ جفت معینوں ما_2، ما_4...... کے

شکل ۲۳

سروں ہیں سے مماس کھینچو اور انہیں اتنا خارج کرو کہ یہ متصلہ طاق معینوں سے جا کر ملیں۔
اگر کل معینوں کی تعداد طاق ہو یعنی ۲ ن + ۱، تو اس طرح ن منحرف حاصل ہونگے
جن کا مجموعہ ل مطع سے زیادہ ہوگا جب گراف بالتمام اوپر کی طرف
محدب ہو۔ پہلے منحرف کا رقبہ ۲ ھ ما$_{۲}$ ہے، دوسرے کا ۲ ھ ما$_{۴}$ اور علیٰ ہذا القیاس
اس لئے رقبہ زیر بحث کا ہمیں ایک اور تقرب حاصل ہوتا ہے

ق$_{۲}$ = ۲ ھ (ما$_{۲}$ + ما$_{۴}$ + ... + ما$_{۲ن}$) .... (۳)

تکملہ (۱) کی قیمت ہمیشہ ق$_{۱}$ اور ق$_{۲}$ کے درمیان واقع ہوتی ہے جبکہ قوس ع ط پر کوئی نقطہ انعطاف نہ ہو اور ہر تقرب کے لئے فرق ± (ق$_{۱}$ - ق$_{۲}$) غلطی یا خطا کا ناپ ہوگا۔

ضابطہ (۲) کو ذو زنقہ قاعدہ کہا جا سکتا ہے۔

ایک اور ضابطہ جو عملی طور پر (۲) یا (۳) کی نسبت زیادہ صحیح ثابت ہوتا ہے اس طرح حاصل ہو سکتا ہے، دفعہ ۲۷، حصۂ اول کی رو سے ہم لکھ سکتے ہیں

فا(لا) = فا(ج) + (لا - ج) فا′(ج) + ½ (لا - ج)^{۲} فا″(لا$_{۱}$)

اگر لا - ج چھوٹا ہو تو ہم یہ مان سکتے ہیں کہ فا″(لا$_{۱}$) کا فرق فا″(ج) سے بہت کم ہے، اگر فا(لا) دوسرے درجہ کا ہو تو فا″(لا$_{۱}$)، فا″(ج) کے بالکل مساوی ہوگا۔

اب مساوات ما = فا(ج) + (لا - ج) فا′(ج) + ½ (لا - ج)^{۲} فا″(ج) ...(۴)
ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے، پس فا(لا) کی ترسیم کے ایک چھوٹے سے طول کی بجائے ہم اس مکافی کی قوس رکھ سکتے ہیں۔

اب دوہرے ٹکڑے ل ل$_{۲}$ ع$_{۲}$ ع پر غور کرو، سہولت کی خاطر فرض کرو کہ و ل$_{۱}$ = ج، و ل = ج - ھ، و ل$_{۲}$ = ج + ھ، اب یہ تسلیم کر کے
کہ قوس ع ع$_{۱}$ ع$_{۲}$ پر فا(لا) کی قیمت (۴) کو استعمال کرنے سے حاصل

ہو سکتی ہے ہمیں رقبہ ل ل، ع ع کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\text{ج}-\text{ھ}}^{\text{ج}+\text{ھ}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{-\text{ھ}}^{+\text{ھ}} \text{فا}(\text{لاَ}+\text{ج})\,\text{فرلاَ} = ۲\text{ھ}\,\text{فا}(\text{ج}) + \frac{\text{ھ}^{۳}}{۳}\,\text{فاً}(\text{ج}) \quad \ldots\ldots(۵)$$

جہاں تکمل کرنیکے لئے ہم رکھتے ہیں $\text{لا} = \text{لاَ}+\text{ج}$۔ یہ تسلیم کرکے کہ فا (لا) کی قیمت (۴) سے حاصل ہوتی ہے ہم (۵) کو ھ، $\text{طا}_{۱}$، $\text{طا}_{۲}$، $\text{طا}_{۳}$ کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں کیونکہ $\text{فا}(\text{ج}) = \text{طا}_{۲}$ اور

$$\text{طا}_{۱} = \text{فا}(\text{ج}-\text{ھ}) = \text{فا}(\text{ج}) - \text{ھ}\,\text{فاَ}(\text{ج}) + \frac{۱}{۲}\text{ھ}^{۲}\,\text{فاً}(\text{ج})$$

$$\text{طا}_{۳} = \text{فا}(\text{ج}+\text{ھ}) = \text{فا}(\text{ج}) + \text{ھ}\,\text{فاَ}(\text{ج}) + \frac{۱}{۲}\text{ھ}^{۲}\,\text{فاً}(\text{ج})$$

جمع کرنے سے

$$\text{ھ}^{۲}\,\text{فاً}(\text{ج}) = \text{طا}_{۱} + \text{طا}_{۳} - ۲\,\text{فا}(\text{ج}) = \text{طا}_{۱} + \text{طا}_{۳} - ۲\,\text{طا}_{۲}$$

اور (۵) ہوجاتی ہے $\frac{۱}{۳}\text{ھ}(\text{طا}_{۱} + ۴\,\text{طا}_{۲} + \text{طا}_{۳}) \quad \ldots\ldots(۶)$

اب فرض کرو کہ رقبہ ل م ط ع کو متساوی الفصل معینوں کی طاق تعداد ۲ن + ۱ سے ٹکڑوں کی جفت تعداد ۲ن میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ضابطہ (۶) کو سلسلہ وار ن دوہرے ٹکڑوں کے لئے استعمال کرنے سے ن جملوں کا مجموعہ حسب ذیل حاصل ہوتا ہے، رقموں کو نئی ترتیب کے موافق لکھا گیا ہے

$$\text{ق} = \frac{۱}{۳}\text{ھ}\left\{\text{طا}_{۱} + \text{طا}_{۲\text{ن}+۱} + ۲(\text{طا}_{۳} + \text{طا}_{۵} + \ldots\ldots + \text{طا}_{۲\text{ن}-۱}) + ۴(\text{طا}_{۲} + \text{طا}_{۴} + \ldots\ldots + \text{طا}_{۲\text{ن}})\right\} \quad \ldots\ldots(۷)$$

(۷) سمسن کا ضابطہ کہلاتا ہے۔ الفاظ میں اسے یوں بیان کرسکتے ہیں، رقبہ کو متساوی الفصل معینوں سے ٹکڑوں کی جفت تعداد میں تقسیم کرو۔

(۱) شروع اور اخیر کے معینوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

(۲) باقی ماندہ طاق معینوں کے مجموعہ کا دوچند معلوم کرو۔

(۳) جفت معینوں کے مجموعہ کا چار گنا معلوم کرو۔

اِن تین مجموعوں کو جمع کرو اور اِس حاصل جمع کو معینوں کے مشترک فاصلہ کے ایک تہائی سے ضرب دو۔

فرض کرو کہ ع = ط۱ + ط۲ن+۱

و = ط۲ + ط۴ + ط۶ + ... + ط۲ن

ر = ط۳ + ط۵ + ... + ط۲ن-۱

تب ھ، ع، و، ر کی رقوم ہیں

ق۱ = ½ ھ (ع + ۲و + ۲ر)، ق۲ = ۲ھو

ق۳ = ⅓ ھ (ع + ۴و + ۲ر)

اِس لئے ق۳ = ⅔ ق۱ + ⅓ ق۲ .... (۸)

فرض کرو کہ ترسیم اوپر کی طرف محدب ہے اور معین مثبت ہیں یعنی

ق۱ > رقبہ ل م ط ع > ق۲

تب ق۳ - ق۱ = ⅓ (ق۲ - ق۱)

ق۲ - ق۳ = ⅔ (ق۲ - ق۱)

اِس لئے سمسن کے کلیہ میں غلطی یا خطا ⅔ (ق۲ - ق۱) یا ⅓ ھ (۲و - ۲ر - ع) .... (۹) سے کم ہے۔

ضابطہ (۸) سے ظاہر ہوتا ہے کہ سمسن کے کلیہ میں بیرونی کثیر الاضلاع کی نسبت اندرونی کثیر الاضلاع کو زیادہ اہمیت دی گئی ہے۔

تقرب کے مندرجہ بالا طریقے ایک محدود تکملہ کی صورت میں بھی استعمال ہو سکتے ہیں خواہ فا(لا) کو منحنی کا معین تصور کیا جائے یا نہ کیا جائے مثلاً قطبی محددوں میں

فا (لا)، کسی محنی کا سمتی نیم قطر ہو سکتا ہے اور لا سمتی زاویہ۔ اس صورت میں معینوں فا، فا، فا .... کی بجائے تفاعل کی وہ قیمتیں استعمال ہونگی جو دلیل یا وجہ کی متساوی الفرق قیمتوں کے جواب میں حاصل ہوں۔ تقربات کے استعمال کی مشہور علمی صورت مجسمات کی مساحت میں ملتی ہے جہاں فا، فا، ..... متساوی الفصل تراشوں کے رقبے ہوتے ہیں (علمی مساحت میں سمسن کے کلیہ کے استعمال کے متعلق ملاحظہ ہو کوخ کی مساحت اعلیٰ مدارج کے طلبہ کے لئے، لنڈن، لونگ مین)

مثال $\int_{1}^{2} \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}}$ کو محسوب کرو۔

فرض کرو کہ ۲ ن + ۱ = ۱۱، ھ = ۰٫۱، ا = ۱، ب = ۲

معمولی حساب سے معلوم ہوگا کہ

ع = ۱٫۵، و = ۳٫۴۵۹۵۳۹۴، ر = ۲٫۷۲۸۱۷۴۶

ف$_1$ = ۰٫۶۹۳۷۷۱، ف$_2$ = ۰٫۶۹۱۹۰۸، ف$_3$ = ۰٫۶۹۳۱۵۰

تکملہ کی ٹھیک قیمت لوک ۲ یعنی ۰٫۶۹۳۱۴۷ ہے، $\frac{۲(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)}{۳}$ کی قیمت ۰٫۰۰۱۲۴۲ ہے اور ف$_3$ ۔ لوک ۲ کی ۰٫۰۰۰۰۰۳

بالعموم سمسن کے ضابطہ کی غلطی اُس اندازہ سے بہت کم ہوتی ہے جو (۹) سے حاصل ہوتا ہے۔

مشق ۸

۱- ایک مستوی سطح جو محور لا پر عمود وار ہے ایک سطح کو کاٹتی ہے اور اس تراش کا رقبہ فا (لا) ہے، دفعہ ۲۴ میں جو معین فا، فا، فا ..... ہیں اگر ان کی بجائے تراشوں س$_1$، س$_2$، ..... کے رقبے استعمال کئے جائیں تو جملات (۲)، (۳)، (۶)، (۷) سے سطح کا حجم معلوم ہوتا ہے جو متناظر مستوی سروں کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ پس (۶) سے حجم معلوم ہوگا

$$ح = \frac{۱}{۳} ھ (س_1 + ۴ س_2 + س_3) .... (۱)$$

جہاں $س_۱$، $س_۳$ سروں کی تراشوں کے رقبے ہیں، $س_۲$ وسطی تراش کا رقبہ ہے اور ۲ ھ سروں کی تراشوں کا درمیانی فاصلہ ہے، قیمت (۱) تقریبی ہونے کی بجائے بالکل صحیح ہوگی جبکہ فا (لا) لا کا دو درجی تفاعل ہو۔

اس ضابطہ کو استعمال کرنے سے دفعہ ۱۸ کے حجموں کے متعلق نتائج حاصل کرو۔ نیز اس ضابطہ کو اُس مجسم پر لگاؤ جو مکافی کے محور کے گرد گھومنے سے پیدا ہوتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ ضابطہ (۱) منشور نما کے لئے بھی درست رہتا ہے۔

منشور نما ایک مجسم ہے جس کی اوپر اور نیچے کی احاطہ کرنے والی سطحیں کثیر الاضلاع اشکال ہوتی ہیں، ان اشکال کے متناظر اضلاع متوازی ہوتے ہیں اور ان کی تعداد اضلاع وہی ہوتی ہے۔ اور اس حجم کے اطراف احاطہ کرنے والی سطحیں منحرف ہوتی ہیں۔

۳۔ شراب کے ایک پیپے میں $د_۱$ چوبی کا قطر ہے اور $د_۲$ ڈاٹ والا قطر ہے اور ھ پیپے کی گہرائی ہے، ثابت کرو کہ جب پیپے کا منحنی مکافی ہو تو اسکا حجم ہوگا

$$\frac{\pi}{۱۲} ھ \left\{ د_۱^۲ + ۲ د_۲^۲ - \frac{۴}{۱۰} (د_۲ - د_۱)^۲ \right\}$$

جب پیپے کے نچلے اور اوپر کے نصف باہم مساوی اور متشاکل ہوں اور ہر نصف گردش کا ناقص یا کٹا ہوا مکافی نما ہو اور بڑے سرے پیپے کے وسط میں جوڑے جائیں، تو ثابت کرو کہ پیپے کا حجم

$$\frac{\pi}{۸} ھ (د_۱^۲ + د_۲^۲) \text{ ہے۔}$$

۴۔ اگر $فا(لا) = ا + ب(لا - ج) + ع(لا - ج)^۲ + ف(لا - ج)^۳$ تو ثابت کرو کہ دفعہ ۴۲ کا ضابطہ (۶) قائم رہتا ہے۔

۵۔ اگر $فا(لا) = ا + ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳$ اور اگر فا (لا) کی قیمتیں لا کی قیمتوں ا، ا + ھ، ا + ۲ ھ، ا + ۳ ھ کے جواب میں بالترتیب $فا_۱$، $فا_۲$، $فا_۳$، $فا_۴$ ہوں تو ثابت کرو کہ جو رقبہ منحنی، محور لا اور معینوں $فا_۱$، $فا_۴$ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ $\frac{۳}{۸} ھ (فا_۱ + ۳ فا_۲ + ۳ فا_۳ + فا_۴)$ ہے۔

اس ضابطہ کو بعض اوقات سمسن کا دوسرا کلیہ کہتے ہیں۔
اسے ثابت کرنے کے لئے رکھو لا = ا + ھ ت، تب فا (لا) کی شکل ہوگی

$$\text{فہ (ت)} = \text{ک} + \text{ق ت} + \text{ر ت}^2 + \text{س ت}^3$$

اور فا، فا۱، فا۲، فا۳ فہ (ت) کی قیمتیں ہیں ت کی قیمتوں ۰، ۱، ۲، ۳ کے لئے اور رقبہ ہے

$$\int_{ا}^{ا+۳ھ} \text{فا (لا) فرلا} = \text{ھ} \int_{۰}^{۳} \text{فہ (ت) فرت}$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک جب لا فرلا} = - \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{لا ضم لا فرلا}$$

اور سمسن کے کلیہ سے تکملہ کی قیمت معلوم کرو۔
تکملہ کی صحیح قیمت $- \frac{\pi}{2}$ لوک ۲ ہے۔
تکملہ کو ع سے تعبیر کرو۔ تب

$$\text{ع} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک جب لا فرلا} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک جم لا فرلا} = \frac{1}{2} \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{(لوک جب لا + لوک جم لا) فرلا}$$

$$\text{پس ۲ع} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک} \left(\frac{1}{2} \text{ جب ۲لا}\right) \text{فرلا} = \frac{\pi}{2} \text{ لوک } \frac{1}{2} + \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک جب ۲لا فرلا}$$

$$\text{نیز} \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک جب ۲لا فرلا} = \frac{1}{2} \int_{۰}^{\pi} \text{لوک جب ی فری} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک جب ی فری}$$

اور نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک مس لا فرلا} = ۰$۔ [عمل تکمل کی ضرورت نہیں۔]

۸۔ ثابت کرو کہ جب ن مائل ∞ ہو تو $\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \frac{1}{\sqrt{\text{ن}^2 - \text{ر}^2}}$ کی انتہا $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ جب ن مائل بہ ∞ ہو تو $\sum_{ر=\cdot}^{ن-۱} \frac{ن}{ن^۲+ر^۲}$ کی انتہا $\frac{\pi}{۴}$ ہے۔

۲۵۔ اوسط قیمتیں۔ ن مقادیر $ما_۱$، $ما_۲$، $ما_۳$ ...... $ما_ن$ کا اوسط حسابی $\frac{ما_۱+ما_۲+......+ما_ن}{ن}$ ہے۔ فرض کرو کہ لا کی قیمتوں ا، ا+ھ، ا+۲ھ، ا+۳ھ ...... ب۔ھ کے جواب میں فا(لا) کی قیمتیں $ما_۱$، $ما_۲$، $ما_۳$ ...... $ما_ن$ ہیں جہاں وقفہ ب۔ا کو طول ھ کے ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ $ما_۱$، $ما_۲$ ...... $ما_ن$ کے اوسط حسابی کی انتہا جبکہ ن ← ∞ تفاعل فا(لا) کی اوسط قیمت کہلاتی ہے سعت ب۔ا میں۔

اوسط قیمت کو بطور تکملہ کے بیان کر سکتے ہیں کیونکہ

$$\left(\frac{ما_۱+ما_۲+......+ما_ن}{ن}\right) = \left(\frac{ما_۱ھ+ما_۲ھ+......+ما_نھ}{ب-ا}\right) ......(۱)$$

اور بائیں جانب کی کسر کا شمار کنندہ

$$فا(ا)ھ + فا(ا+ھ)ھ + ... + فا(ب-ھ)ھ$$

ہے اور اسکی انتہا ن ← ∞ (اور اس لئے ھ ← ۰) کے لئے ہے

$$\int_ا^ب فا(لا)\,فرلا$$ ۔ پس اوسط قیمت ہے

$$\frac{۱}{ب-ا}\int_ا^ب فا(لا)\,فرلا \;...............\; (۲)$$

مثال ۱۔ نیم قطر ا کے نصف دائرہ کے معیّن کی اوسط قیمت ہے

$$\frac{۱}{۲ا}\int_{-ا}^{ا} \sqrt{ا^۲-لا^۲}\,فرلا = \frac{\pi}{۴}ا = ۰٫۷۸۵۴ا$$

اس صورت میں قطر کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ لیکن اگر نصف محیط کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے اور تفاعل کا متغیر متبوع قوس اطہ ہو جہاں طہ قطر کے ایک سرے سے اس نقطہ تک ناپا گیا ہے جہاں سے معیّن

گرایا گیا ہے تو چونکہ معین کا طول ا جب طہ ہے اس لئے اوسط قیمت ہوگی

$$\frac{1}{\pi ا} \int_0^{\pi} ا \text{ جب } طہ\ ا\ ف\ طہ = \frac{2}{\pi} ا = ۰٫۶۳۶۶\ ا$$

پس یاد رہے کہ اوسط قیمت کا ذکر کرنے میں متغیر متبوع کی تخصیص ضروری ہے۔

مثال ۲۔ موسیقی منحنی کی صورت میں لا = ۰ سے لا = π تک (۱) اوسط معین (۲) اور معین کے مربع کا جو اوسط ہے اس کا جذر المربع معلوم کرو۔

$$(۱) \text{ اوسط معین } = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ا \text{ جب لا ف لا } = \frac{2}{\pi} ا = ۰٫۶۳۶۶\ ا$$

صورت (۲) میں تفاعل ہے فا اور فا کی اوسط قیمت

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ا^2 \text{ جب}^2 \text{ لا ف لا } = \frac{1}{2} ا^2$$

اور اس اوسط کا جذر المربع $\frac{ا}{\sqrt{2}}$ یعنی ۰٫۷۰۷۱ ا ہے۔

متبادل برقی رو کے نظریہ میں کارآمد اوسط (۱) نہیں ہے بلکہ (۲) ہے، موخرالذکر کو اختصاراً معین کی اوسط مربع قیمت کہا جا سکتا ہے۔

اگر وقفہ ب ـ ا کو ن ذیلی وقفوں ھ۱، ھ۲ ...... میں تقسیم کیا جائے اور اگر ان وقفوں میں کے کسی نقاط پر بالترتیب فا (لا) کی قیمتیں فا۱، فا۲، فا۳ ...... ہوں تو جب، ن لا انتہا ہوگا (یعنی ہر ذیلی وقفہ ھ۱، ھ۲ ...... صفر ہوگا)

$$\text{تو } \frac{\text{فا}_1 ھ_1 + \text{فا}_2 ھ_2 + \ldots\ldots + \text{فا}_ن ھ_ن}{ب - ا} \text{ کی انتہا وہی (۲) ہوگی۔}$$

پس تکملہ (۲) کو ہم فا (لا) کی اوسط قیمت کی تعریف خیال کر سکتے ہیں۔

۲۶۔ دوہرے تکملے

فرض کرو کہ ع ف گ ح (شکل ۲۴) ایک مستوی منحنی ہے اور ف (لا، فا) منحنی کے اندر یا اوپر کے سب نقاط کے لئے ایک حید القیمت مسلسل تفاعل ہے۔ فرض کرو کہ ا ح، ب ف اور ج ع، د گ محورین کے متوازی مماس ہیں۔ ہم مان لیتے ہیں کہ کوئی خط مستقیم منحنی کو دو سے زیادہ

نقطوں پر نہیں کاٹتا۔ اگر کوئی منحنی اس شرط کو پورا نہ کرے تو اسے ایسے جزوی رقبوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک اس شرط کو پورا کرے۔

شکل ۲۴

فرض کرو کہ ا ب$_1$ کو م اور ج د$_1$ کو ن ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور نقاط تقسیم میں سے محوروں کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں۔ رقبہ ع ف گ ح اس طرح چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں تقسیم ہو جائیگا اگرچہ ع ف گ ح کے محیط کے نزدیک ان مستطیلوں کے ایسے نقاط ہوں گے جو منحنی کے باہر واقع ہوں گے۔

فرض کرو کہ ا ب$_1$ پر کے دو متصل نقاط تقسیم کے فصلے لا$_ر$، لا$_ر$ + مف لا$_ر$ ہیں اور ج د$_1$ پر کے دو متصل نقاط تقسیم کے معین طا$_س$، طا$_س$ + مف طا$_س$ ہیں اور نقاط ص، صَ کے محدد (لا$_ر$، طا$_س$)، (لا$_ر$ + مف لا$_ر$، طا$_س$ + مف طا$_س$) ہیں۔

مستطیل ص صَ کے رقبہ مف لا$_ر$ مف طا$_س$ کو ف (لا$_ر$، طا$_س$) کے ساتھ ضرب دو جو ف (لا، طا) کی قیمت ص پر ہے، اس طرح سے حاصل جمع

$\sum$ ف (لا$_ر$، طا$_س$) مف لا$_ر$ مف طا$_س$ ...... (۱)

ع ف گ ح کے محیط اور اندر کے سب نقاط کے لئے مرتب کرو۔

[ہندسی نقطہ نظر سے ی = ف (لا، طا) ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے۔

حاصل جمع (۱) کے نمونہ کی رقم ف (لا$_ر$، طا$_س$) مف لا$_ر$ مف طا$_س$ اس

متوازی السطوح کا حجم ہے جس کا قاعدہ مستطیل مف لاِ مف ملِ ہے اور
ارتفاع اس نقطہ کا ی، محدد ف (لاِ، ملِ) ہے جہاں نقطہ ص پر چھوٹے
مستطیل پر کا عماد سطح سے ملتا ہے۔ پس مجموعہ (۱) اس مجسم کے حجم کو تقریباً تعبیر کرتا
ہے جو گھرا ہوا ہے سطح ی = ف (لا، ما) سے، سطح مستوی لا و ما سے
اور اس اسطوانہ سے جو ایک خط مستقیم محیط ع ف گ ح کے گرد حرکت کرنے
سے پیدا کرتا ہے جبکہ یہ خط اثنائے حرکت میں ہمیشہ سطح لا و ما پر عمود رہے
[مقابلہ کرو اشکال ۴۸، ۴۹ حصۂ اول کے ساتھ]

ہم (۱) کی انتہا معلوم کرنا چاہتے ہیں جبکہ م اور ن میں سے ہر ایک لا انتہا بڑھے
اور ساتھ ہی ہر جزو مف لاِ، مف ملِ اور اس لئے ہر رقبہ مف لاِ مف ملِ
لا انتہا گھٹے۔ چونکہ (۱) میں دو طرح کے اضافے ہیں ہم (۱) کو جائز طور پر دوہرے مجموعہ سے
تعبیر کر سکتے ہیں

$\sum\sum$ ف (لاِ، ملِ) مف لاِ مف ملِ .... (۲)

جہاں ایک $\sum$، مف ملِ سے متعلق ہے اور دوسرا مف لاِ سے۔
پہلے لاِ اور مف لاِ کو مستقل رکھو یعنی ن $\to \infty$ کے لئے انتہا معلوم کرو

نہا$_{ن \to \infty}$ $\sum$ ف (لاِ، ملِ) مف ملِ

جو ایک متغیر (یعنی ما) کے تکملہ کی تعریف کے مطابق = $\int_{مٹا}^{مٹَ}$ ف (لاِ، ما) فرما

.... (۳)

تکملہ (۳) میں لاِ، مٹَ، مٹِ واقع ہونگے لیکن مٹَ اور مٹِ
دونوں منحنی ع ف گ ح کی مساوات کی وجہ سے و م یعنی لاِ کے
تفاعل ہیں۔ اس لئے (۳)، لاِ کا تفاعل ہے اور فما (لاِ) سے تعبیر ہو سکتا ہے۔
[ہندسی نقطہ نظر سے فما (لاِ) مذکورہ بالا مجسم کی اس تراش کے منحنی کا رقبہ ہے

جو ن ن َ میں سے گذرنیوالی مستوی سطح جو لا و ما پر عمود وار ہے مجسم سے کاٹتی ہے' اور اگر صغاریات کے صرف پہلے رتبہ کو ملحوظ رکھا جائے تو فہ (لا_ر) مف لا_ر مجسم کے ایک ٹکڑے کا حجم ہے جس کی موٹائی مف لا_ر ہے]
اس کے بعد م ← ∞ کے لئے انتہا معلوم کرو۔

نہا (م ← ∞) ∑ مف لا_ر فہ (لا_ر) = ∫ (و۱ سے وب تک) فہ (لا) فرلا ....(۴)

پس (۱) کی انتہا تکملہ (۴) کے ذریعہ بیان ہو سکتی ہے اور یہ انتہا مذکورہ بالا مجسم کا حجم ہے۔

چونکہ فہ (لا) خود ایک تکملہ ہے' اس لئے جملہ (۴) دوہرا تکملہ ہے اور یہ دوہرا تکملہ اس علامت سے تعبیر ہو سکتا ہے

∫ (و۱ سے وب تک) فرلا ∫ (م ت سے م ن َ تک) ف (لا' ما) فرما ....(۵)

(۴) کے طرز ثبوت سے ظاہر ہے کہ (۵) جو محض ضابطہ (۴) کی علامتی ترقیم ہے الفاظ میں اس طرح بیان ہو سکتا ہے۔ ف (لا' ما) کو بلحاظ ما کے ما = م ت سے ما = م ن َ تک تکمل کرو اور اس عمل تکمل میں لا کو مستقل قرار دو پھر ماحصل کو بلحاظ لا کے لا = و۱ سے لا = وب تک تکمل کرو۔
ہم پہلے م کو پھر ن کو لا انتہا بنانے سے (۱) کی انتہا معلوم کر سکتے ہیں' اس صورت میں نتیجہ اس طرح بیان ہو گا

∫ (وج سے وجا تک) فرما ∫ (ک ق سے ک َ ق َ تک) ف (لا' ما) فرلا ....(۶)

(۶) میں عمل تکمل پہلے بلحاظ لا کے کیا جاتا ہے اور اس عمل میں ما کو مستقل رکھا جاتا ہے' پھر ماحصل کو بلحاظ ما کے تکمل کیا جاتا ہے۔ صریحاً دوہرے تکملے (۵) اور (۶) باہم مساوی ہیں کیونکہ وہ ایک ہی حجم کو تعبیر کرتے ہیں۔

جب رقبہ زیر بحث مستطیل اب ج د ہو تو (۵) میں ما کے حدود مستقل ہونگے یعنی و ج، و د بالترتیب اور (۶) میں لا کے حدود ل ق، ل ف بھی مستقل ہوں گے یعنی و ا، و ب بالترتیب۔ اس لئے و ا، و ب، و ج، و د کی بجائے بالترتیب ا، ب، اَ، بَ لکھنے سے

∫ فرا ∫ ف (لا، ما) فرما = ∫ فرما ∫ ف (لا، ما) فرلا ......(۷)

یعنی جب سب حدود مستقل ہوں تو ما اور لا کے حدود وہی ہونگے خواہ تکمل کے اعمال کو کسی ترتیب میں لیا جائے۔ جب حدود سب مستقل نہ ہوں تو (۵) میں ما کے (یا لا کے) حدود وہی نہیں ہونگے جو مساوی تکملہ (۶) میں ما کے (یا لا کے) حدود ہیں۔ دوہرے تکملہ کی ہندسی تعبیر نہایت کارآمد ثابت ہوتی ہے، لیکن اسکے مفہوم کی توضیح اور طرح سے بھی ہوسکتی ہے، مثلاً ف (لا، ما) کو رقبہ ع ف گ ج پر مادہ کی متغیر سطحی کثافت خیال کیا جاسکتا ہے، اس صورت میں تکملہ سے کل کمیت مادہ حاصل ہوگی۔

۲۷۔ دوہرے تکملوں کی ترقیم۔ قطعی اجزا۔

ضابطہ (۵) اور (۶) کی شکل سے ٹھیک طور پر واضح ہوتا ہے کہ تکملے کس ترتیب سے لئے جانے چاہئیں لیکن اور رقمیں بھی استعمال ہوسکتی ہیں جو اگرچہ ایسی صریح اور بین نہیں تاہم آسان اور سہولت دہ ضرور ہیں، مثلاً یہ صورت

∫∫ ف (لا، ما) فرلا فرما .... (۸)

کچھ ایسے اضافہ کے ساتھ کہ "عمل تکمل کو کل رقبہ ع ف گ ج پر وسعت دیجائے" (۵) یا (۶) کے معادل کے طور پر استعمال ہوسکتی ہے۔

(۵) کی بجائے ذیل کی علامت اکثر استعمال کی جائے گی

$$\int_{\text{ما}}^{\text{وب}} \int_{\text{مت}}^{\text{مت}} \text{ف (لا، ما) ذلا ذما}$$

جس کے متعلق اس دستور کو ملحوظ رکھا جائیگا کہ پہلا تکمل بلحاظ اس متغیر کے ہوگا جو سب سے بائیں جانب ہے یعنی ما اور اس کے حدود اس علامت پر مرقوم ہونگے جو عین تکمل کے پاس ہے یعنی مت مت۔ علاوہ اس کے ہم فرض کرسکتے ہیں کہ رقبہ ع ف گ ح ایسے جزوی رقبوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو مستطیل نہیں ہیں۔ اگر نمونہ کا ایسا جزوی رقبہ مف س ہو اور اگر (مف) س کے اندر یا اسکے محیط پر کے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو (۱) کے جواب میں مجموعہ

$$\sum \text{ف (لا، ما) مف س} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{۱}')$$

مرتب ہوگا۔ ہندسی نقطہ نظر سے اگر دیکھا جائے تو (۱') سے دفعہ گذشتہ کے مجسم کا تقریبی حجم حاصل ہوگا۔ رقبوں مف س کی تعداد کے لا انتہا بڑھانے اور اسکی بنا پر ہر رقبہ مف س کے لا انتہا گھٹانے سے جو انتہا حاصل ہوگی وہ مجسم مذکور کا حجم ہوگا اس انتہا کو اس طرح تعبیر کیا جائیگا

$$\int \text{ف (لا، ما) مف س} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{۹})$$

جہاں ع کی علامت کو کل رقبہ ع ف گ ح پر توسیع دی گئی ہے۔

مسئلہ ۱ دفعہ ۸ حصہ اول کی رو سے یہ دیکھنا آسان ہے کہ جہاں تک مجموعہ (۱') کی انتہا (۹) کا تعلق ہے (لا، ما) مف س کے اندر یا محیط پر کوئی نقطہ ہوسکتا ہے۔ اس بات کا یاد رکھنا نہایت ضروری ہے کیونکہ اس میں جو اصول پنہاں ہے وہ اکثر استعمال کیا جاتا ہے (مثال کے طور پر دیکھو دفعہ ۲۸ کی مثال ۳)

فرض کرو مف س کا تعین اس طرح ہوتا ہے۔ دو متحد المرکز دائرے لو جن کے نصف قطر ر اور ر + مف ر ہوں ان کے دو نصف قطر لو جو ابتدائی خط کے ساتھ زاویے طہ اور طہ + مف طہ بنائیں۔ جو دائروں کی قوسوں

اوران نصف قطروں کے درمیان چھوٹا رقبہ گھرا ہوا ہے اُسے ہم مف س فرض کر سکتے ہیں، ظاہر ہے کہ اس میں ر، طہ نقطہ کے قطبی محدد ہیں، پس

مف س = $\frac{1}{2}$ (ر + مف ر)^2 مف طہ - $\frac{1}{2}$ ر^2 مف طہ

= رمف رمف طہ + $\frac{1}{2}$ (مف ر)^2 مف طہ

پس صغاریات کے رتبہ اول تک مف س = رمف رمف طہ

اگر ف (لا، ما) میں لا = رجم طہ، ما = رجب طہ رکھا جائے اور اسکی تبدیل شدہ شکل فا (ر، طہ) ہو جائے تو (۹) کی بجائے یا اسکے معاولات (۵)، (۶) کی بجائے ملیگا۔

∫∫ فا (ر، طہ) رفر فرطہ .... (۱۰)

جہاں عمل تکمیل کو کل رقبہ ع ف گ ح پر توسیع دی گئی ہے۔

بلحاظ طہ کے تکمیل کرنے میں ر کو مستقل رکھا جائیگا طہ تکمل سے ہندسی تعبیر کے مطابق مجسم کی اسطوانی تراش کا رقبہ ملیگا۔ تکملہ (۱۰) کی قیمت معلوم کرنے سے پہلے منحنی ع ف گ ح کو کھینچ لینا چاہئے اور اس امر کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ کوئی رقبہ سوائے ان رقبوں کے جو منحنی سے متعلق ہیں حساب لگانے میں شریک نہ ہو جائے منحنی سے متعلق کوئی رقبہ حساب لگانے میں رہ نہ جائے یہی ہدایت اکثر تکملی اعمال پر عائد ہوگی۔ طالب علم ان نتائج کی توسیع بآسانی تہرے تکملوں

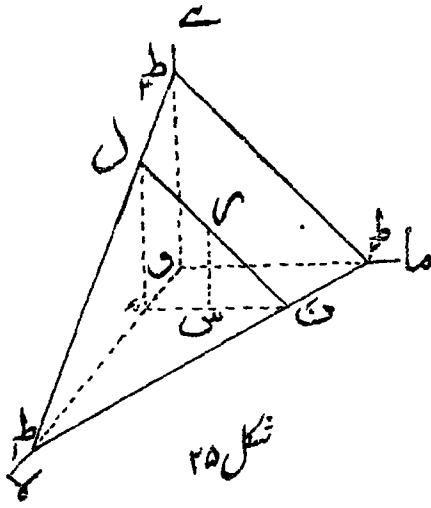
∫∫∫ ف (لا، ما، ی) فرلا فرما فری یا ∫ ف (لا، ما، ی) فرح

کی صورت میں کرسکتا ہے جہاں فرلا فرما فری یا فرح حجم کا ایک جزو ہے اور ف (لا، ما، ی) مثلاً نقطہ (لا، ما، ی) پر کثافت ہے، بلحاظ ی کے تکمل کرنے سے جبکہ لا، ما کو مستقل رکھا جائے اُس ستون کی کمیت حاصل ہوگی جو قاعدہ فرلا فرما پر کھڑا ہے۔ پھر ما تکمل سے جبکہ لا کو مستقل رکھا جائے ایک ایسی قاش کی کمیت حاصل ہوگی جس کی موٹائی فرلا ہے اور جو محور لا پر عمود وار ہے اور آخر الامر لا،

تکمل سے حجم کی کل کمیت حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ اس چار سطحی کا حجم معلوم کرو جو محددوں کی سطوح مستویہ اور سطح

$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} + \frac{ی}{ج} = ۱$ سے گھری ہوئی ہے، ا، ب، ج تینوں مثبت ہیں۔

منحنی ع ف گ ح اس صورت میں مثلث و ط ط ہے ط ط کی مساوات یہ ہے

$ما = ب(۱ - \frac{لا}{ا})$

اور م ن = $ب(۱ - \frac{لا}{ا})$

اور دفعہ ۲۹ کا م ن اسجگہ صفر ہے۔

پس ر = ف (لا، ما) = ی

$= ج(۱ - \frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب})$

اس لئے (۵) کو استعمال کرنے سے حجم حاصل ہوگا

شکل ۲۵

$\int_0^{ا} فرلا \int_0^{م ن} ی\, فرما = ج \int_0^{ا} فرلا \left[(۱ - \frac{لا}{ا}) ما - \frac{۱}{۲} \frac{ما^۲}{ب} \right]_0^{م ن}$

$= \frac{۱}{۲} ب ج \int_0^{ا} (۱ - \frac{لا}{ا})^۲ فرلا = \frac{۱}{۶} ا ب ج$

صریحاً $\frac{۱}{۲} ب ج (۱ - \frac{لا}{ا})^۲$ مثلث ل م ن کا رقبہ ہے۔

مثال ۲۔ تکمل $\int لا^۲ فرح$ کی قیمت معلوم کرو جبکہ اسے ناقص نما

$\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} + \frac{ی^۲}{ج^۲} = ۱$ کے تمام حجم میں سے لیا جائے۔

$\int لا^۲ فرح = \int لا^۲ فرلا \int\int فرما\, فری = \int_{-ا}^{ا} لا^۲ فرلا \left[\pi ب ج (۱ - \frac{لا^۲}{ا^۲}) \right]$

کیونکہ بلحاظ ما اور ی کے تکمل کرنے میں لا مستقل ہے اور ∫∫ فرما فری اس تراش کا رقبہ ہے جو محور لا پر عمود وار ہے۔ اب بلحاظ لا کے تکمل کرو، نتیجہ $\frac{4\pi\,\text{ا}^{3}\,\text{ب ج}}{15}$ حاصل ہوتا ہے۔ تفاعل لا² کی اوسط قیمت ناقص نما کے تمام حجم میں اوپر کی قیمت $\frac{4\pi\,\text{ا}^{3}\,\text{ب ج}}{15}$ کو حجم پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے یعنی $\frac{\text{ا}^{2}}{5}$ ۔

بالعموم تفاعل ف (لا، ما) کی اوسط قیمت رقبہ ع ف گ ح (شکل ۲۴) پر اتکملہ (۵) یا (۶) کو کل رقبہ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگی اور اسی طرح کی تعریف کل حجم میں کی اوسط قیمت کے لئے صادق آئے گی۔ اگر اس مثال میں لا² نقطہ (لا، ما، ی) پر ناقص نما کی کمیت مادہ کی کثافت ہو تو $\frac{\text{ا}^{2}}{5}$ اس کمیت مادہ کی اوسط کثافت ہوگی۔

مثال ۳۔ فہ (لا) صرف لا کا تفاعل ہے اور سا (ما) صرف ما کا اور ف (لا، ما) ان دو تفاعلوں کا حاصل ضرب ہے دفعہ ۲۶ سے یہ لازم آتا ہے کہ حاصل ضرب فہ (لا) سا (ما) کا تکملہ جبکہ اسے مستطیل ا ب₂ ج₂ د₂ (شکل ۲۴) پر لیا جائے ذیل کے تکملوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا

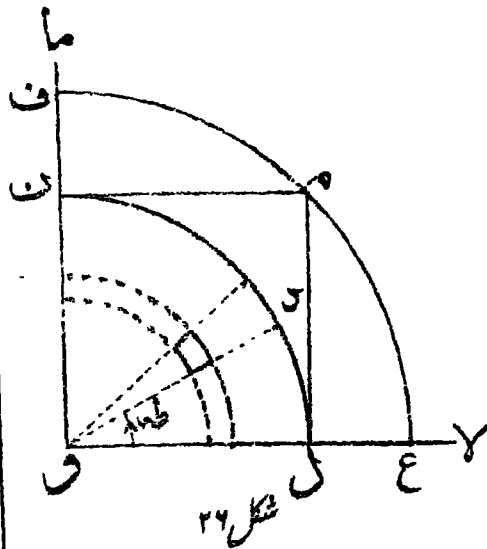
$$\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} \qquad \text{اور} \qquad \int_{\text{کر}}^{\text{بَ}} \text{سا (ما) فرما}$$

اب فرض کرو کہ فہ (لا) = $\text{تو}^{-\text{لا}^{2}}$ اور سا (ما) = $\text{تو}^{-\text{ما}^{2}}$

$$\text{اور}\ \text{ع} = \int_{\text{ب}}^{\text{ر}} \text{تو}^{-\text{لا}^{2}}\,\text{فرلا} = \int_{\text{ب}}^{\text{ر}} \text{تو}^{-\text{ما}^{2}}\,\text{فرما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ظاہر ہے کہ ان دو تکملوں کا حاصل ضرب ع² مساوی ہے ذیل کے تکملہ کے جبکہ اسے مربع ق ل م ن پر لیا جائے (شکل ۲۶) جس کا ضلع ق ل = ر

$$\iint \text{تو}^{-(\text{لا}^{2}+\text{ما}^{2})}\,\text{فرلا فرما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

شکل ۲۶

و کو مرکز مان کر دو دائروں کی قوسیں کھینچو، ایک دائرہ کا نصف قطر و ل = ا ہو، اور دوسرے کا و م = ا$\sqrt{2}$

تکملہ (۲) بڑا ہے اس تفاعل کے تکملہ سے جبکہ اسے رقبہ و ل ک ن پر لیا جائے اور چھوٹا ہے اس تفاعل کے تکملہ سے جبکہ اسے رقبہ و ع م ف پر لیا جائے۔ یہ دو تکملے قطبی محددوں میں تبدیل کرنے سے باآسانی حاصل ہوسکتے ہیں، فرلا فرما کی بجائے رفرر فرطا ہوگا اور قو$^{-(لا^2+ما^2)}$ کی بجائے قو$^{-ر^2}$ اور (۲) ہوجائیگا رقبہ و ل ک ن کے لئے

$$\iint \text{قو}^{-\text{ر}^2} \text{ر فر ر فر طا} = \int_{\cdot}^{\text{ا}} \text{قو}^{-\text{ر}^2} \text{ر فر ر} \int_{\cdot}^{\frac{\text{ π}}{2}} \text{فر طا} = \frac{\text{π}}{4}\left(1 - \text{قو}^{-\text{ا}^2}\right)$$ کیونکہ

قو$^{-ر^2}$ ر کا تکملہ $-\frac{1}{2}$ قو$^{-ر^2}$ ہے

جب تکملہ رقبہ و ع م ف پر محسوب کیا جائے تو تکملہ کی قیمت $\frac{\pi}{4}(1-$ قو$^{-2ا^2})$ ہوگی۔ ع^2 ان دو قیمتوں کے درمیان واقع ہوتا ہے، لیکن جب ا مائل بہ لاانتہا ہو تو دونوں قیمتیں مائل بہ $\frac{\pi}{4}$ ہوتی ہیں اور اس صورت میں ع^2 مائل بہ $\frac{\pi}{4}$ اور ع مائل بہ $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ہوتا ہے۔ پس

$$\int_{\cdot}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^2} \text{فرلا} = \underset{\text{ا} \to \infty}{\text{نہا}} \int_{\cdot}^{\text{ا}} \text{قو}^{-\text{لا}^2} \text{فرلا} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

یہ مثال ایک مشہور تکملہ کی خاص صورت ہے (دیکھو مشق ۹، مثال ۲۱) اور

اوپر کا استعمال قابل توجہ ہے۔

۲۸۔ جمود کے مرکز۔ علم حیل کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ایسے ن ذرات کا مرکز جمود $(\bar{\text{لا}}, \bar{\text{ما}}, \bar{\text{ی}})$ جن کی کمیتیں $\text{م}_1, \text{م}_2, \text{م}_3 \ldots\ldots \text{م}_\text{ن}$ ہوں اور جو بالترتیب نقاط $(\text{لا}_1, \text{ما}_1, \text{ی}_1), (\text{لا}_2, \text{ما}_2, \text{ی}_2) \ldots\ldots (\text{لا}_\text{ن}, \text{ما}_\text{ن}, \text{ی}_\text{ن})$ پر واقع ہوں ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{م}_1\text{لا}_1 + \text{م}_2\text{لا}_2 + \ldots\ldots + \text{م}_\text{ن}\text{لا}_\text{ن}}{\text{م}_1 + \text{م}_2 + \ldots\ldots + \text{م}_\text{ن}} = \frac{\Sigma\, \text{م لا}}{\Sigma\, \text{م}} \ldots\ldots (1)$$

اور اسی طرح کے جملے $\bar{\text{ما}}, \bar{\text{ی}}$ کے لئے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر جسم میں مادہ کی تقسیم مسلسل ہو تو نقطہ (لا، ما، ی) پر حجمی کثافت ک، $\frac{\text{مف م}}{\text{مف ح}}$ کی انتہا ہو گی جبکہ مف ح ← ۰۔ جہاں مف م نقطۂ مذکورہ کے گرد کے حجم مف ح کی کمیت مادہ ہے۔ اسلئے صغاریات کے رتبۂ اول تک

$$\text{مف م} = \text{ک مف ح}$$

جب یہ فرض کیا جا سکے کہ سب کمیت ایک سطح پر یا ایک خط پر مکثف ہے تو اسی طرح مف م = کہ مف س، مف م = لہ مف س جہاں کہ اور لہ نقطۂ مفروضہ پر بالترتیب سطحی اور خطی کثافتیں ہیں اور مف س اور مف س نقطہ کے گرد رقبہ اور قوس کے اجزا ہیں۔

کسی مسلسل کمیت مادہ کو کمیت مف م کے ن اجزا میں تقسیم کیا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے، اگر جزو مف م میں کے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما، ی) ہوں تو اس مقدار مادہ کے مرکز جمود کے محدد ہوں گے

$$\bar{\text{لا}} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \frac{\Sigma\, \text{لا مف م}}{\Sigma\, \text{مف م}} = \frac{\int \text{لا مف م}}{\int \text{مف م}} \ldots\ldots (2)$$

اور اسی طرح کے جملے $\bar{\text{ما}}, \bar{\text{ی}}$ کے لئے حاصل ہوں گے۔ جملہ (۲) میں جو نکلے ہیں

انہیں تمام مقدار مادہ میں لیا جائیگا۔
مادہ کی حجمی، سطحی اور خطی تقسیم میں مساواتیں (۲) یہ شکلیں اختیار کرینگی۔

∫ لا ک فرح / ∫ ک فرح ، ∫ لا کہ فرس / ∫ کہ فرس ، ∫ لا لہ فرس / ∫ لہ فرس ......(۳)

نسب نما ہر صورت میں تمام کمیت مادہ ہے۔
مرکز جمود کی بجائے بعض اوقات مصطلحات مرکز کمیت یا مرکز ہندسی استعمال ہوتی ہیں، کسی حجم، رقبہ یا خط کا مرکز ہندسی یکساں کثافت کی کسی کمیت مادہ کا مرکز جمود ہے جو اس حجم، رقبہ یا خط کے اندر شامل ہو۔

مثال ا۔ یکساں کثافت کے دائرہ کی قوس ب ع ج (شکل ۸۰)
فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے، و ع = ا اور ج و ب = ۲عہ
فرض کرو کہ و ع زاویہ ج و ب کی تنصیف کرتا ہے، و ع کو محور لا مقرر کرو۔

ازروئے تشاکل ما = ۰
فرض کرو کہ ∠ ع و ن = طہ
و ل = لا = ا جم طہ
قوس ع ن = س = ا طہ
فرس = ا فرطہ
خطی کثافت لہ مستقل ہے،
اس لئے کمیت ۲ لہ ا عہ ہے۔

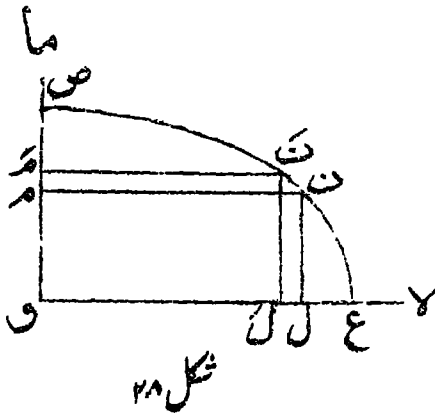
شکل ۲۷

نیز ∫ لا لہ فرس = لہ ∫ (از -عہ تا عہ) ا جم طہ ا فرطہ = ۲ لہ ا² جب عہ

اسلئے لآ = ۲ لہ ا² جب عہ / ۲ لہ ا عہ = ا جب عہ / عہ

مثال ۲ ۔ یکساں کثافت کا مستوی تپلا جس کی شکل ناقص کے ربع و ع ن ص کی ہے (شکل ۲۸)

دوہرے تکملی کو استعمال کرنے کے بغیر ایسے سوال حل ہو سکتے ہیں۔

و ع کے متوازی ایک پتلا ٹکڑا م ن نَ مَ لو جس کا عرض فرما ہے۔ اسکو کمیت کا ایک جزو مانو۔ اس ٹکڑے کا مرکز جمود اس نقطہ تنصیف پر ہے اور و ص کے گرد اس کا معیار اثر

شکل ۲۸

$\frac{1}{2}$ لا × کما لا فرما یعنی $\frac{1}{2}$ کما لا^2 فرما ہے۔

کل کمیت π کما $\frac{\text{اب}}{4}$ ہے۔

اس لئے $\frac{\pi\ \text{کما اب}}{4}\ \overline{\text{لا}} = \frac{1}{2}\text{کما}\int_0^{\text{ب}}\text{لا}^2\,\text{فرما} = \frac{1}{2}\text{کما}\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}\int_0^{\text{ب}}(\text{ب}^2-\text{ما}^2)\,\text{فرما}$

$= \frac{1}{3}\text{کما ا}^2\text{ب}$

اس لئے $\overline{\text{لا}} = \frac{4\text{ا}}{3\pi}$

اسی طرح سے $\overline{\text{ما}} = \frac{4\text{ب}}{3\pi}$ حاصل ہوگا اگر ٹکڑے لَ ل ن نَ کو کمیت کا ابتدائی جزو مانا جائے۔

اگر کثافت یکساں نہ ہو تو اوپر کا طریقہ بالعموم کارگر نہیں ہوتا۔

فرض کرو کہ کما = س لا ما (س مستقل)

کل کمیت ت = ∫∫ س لا ما فر لا فر ما = س ∫ لا فر لا ∫ ما فر ما

= ½ س ∫ لا × ق م² فر لا

اور چونکہ ق م² = ما² = ب² (۱ − لا²/ا²) ہمیں بآسانی حاصل ہوتا ہے

ت = ⅛ س ا² ب²

نیز ت لاَ = ∫∫ لا × س لا ما فر لا فر ما = س ∫ لا² فر لا ∫ ما فر ما

= 1/15 س ا³ ب²

اسلئے لاَ = 8/15 ا، اسی طرح سے ماَ = 8/15 ب

مثال ۳ ـ یکساں کثافت کا قطاع دائرہ۔

مثال (۱) کی ترقیم اختیار کرو ـ چھوٹے قطاع و ن ق کو کمیت کا جزو مانو
و ن ق کا مرکز جمود نقطہ (⅔ ا، طہ) پر ہے اور جزو کا معیار اثر و ما کے گرد ہے

⅔ ا جم طہ × کہ ½ ا² فر طہ = ⅓ کہ ا³ جم طہ فر طہ

کل کمیت ت = کہ ا² عہ، از روئے تشاکل ماَ = ۰ پس

ت لاَ = ⅓ کہ ا³ ∫ جم طہ فر طہ (حدود: −عہ تا عہ) = ⅔ کہ ا³ جب عہ

پس لاَ = ⅔ ا (جب عہ / عہ)

اگر کثافت یکساں نہ ہو تو بالعموم دوہرے تکمل کی ضرورت ہوگی۔
و ن ق کے مرکز جمود کو و ن پہ مانا گیا ہے، یہ کئی بار جتایا گیا ہے کہ
انتہا لینے میں ایک ہی بات ہے خواہ نقطہ (⅔ ا، طہ) کو یا (⅔ ا، طہَ) کو

مرکز جمود مانا جائے جہاں $\bar{ط}$ ، ط اور ط + صف ط کے درمیان کوئی قیمت ہے۔ اس قسم کے اختصار سے اکثر کام لیا جاتا ہے۔ اسی طرح سے مثال (۲) میں اختصاراً یہ مان لیا گیا تھا کہ خط م ن ن م کا مرکز جمود م ن کے نقطۂ تنصیف پر ہے۔

مثال ۴۔ یکساں قائم مستدیر مخروط۔

ازروئے تشاکل مرکز جمود محور پر واقع ہے۔ راس سے فاصلہ لا پر ایک تراش لو جو محور پر عمود وار ہو۔ اگر مخروط کا ارتفاع ف اور قاعدہ کا رقبہ ق ہو تو اس تراش کا رقبہ $\frac{لا^2 ق}{ف^2}$ ہوگا۔ اس تراش اور راس سے فاصلہ لا + صف لا پر جو متوازی تراش ہے ان کے درمیان کی قاش کو کمیت کا جزو قرار دو۔ کل کمیت

$$ت = \frac{1}{3} ک ف ق$$

اور $ت \bar{لا} = \int_0^ف لا \times ک \frac{لا^2}{ف^2} ق \, ذ لا = \frac{1}{4} ک ف^2 ق$

اور $\bar{لا} = \frac{3}{4} ف$

اگر کثافت یکساں نہ ہو تو دوہرے یا تہرے تکملے استعمال کرنے کی ضرورت ہوگی کیونکہ کمیت کا جزو حسب بالا منتخب نہیں کیا جا سکتا لیکن اگر کثافت صرف لا کا تفاعل ہو تو یہی طریقہ صادق آئیگا مثلاً اگر ک = د لا (د مستقل) تو طالب علم ثابت کر سکتا ہے کہ

$ت = \frac{ق}{ف^2} \int_0^ف ک لا^3 ذ لا = \frac{1}{4} د ق ف$ یعنی $\bar{لا} = \frac{4}{5} ف$

۶۲۔ جمود کا معیار اثر۔ فرض کرو کہ ن ذرات ہیں جنکی کمیتیں بالترتیب $م_1$، $م_2$، ...... $م_ن$ ہیں اور ایک ثابت محور و ط سے ان کے فاصلے بالترتیب $ر_1$، $ر_2$، ..... $ر_ن$ ہیں، علم حیل کی کتابوں میں مجموعہ

$$م_1 ر_1^2 + م_2 ر_2^2 + م_3 ر_3^2 + \dots\dots + م_ن ر_ن^2$$

یا اختصاراً $\sum م ر^2$ کو اس نظام ذرات کے جمود کا معیار اثر یا صرف معیار کہتے ہیں محور ق ط کے گرد۔

جب یہ کمیتیں ایک مسلسل جسم کی شکل میں ہوں تو حاصل جمع کی بجائے عمل تکمل کرنا ہوگا جیسا کہ جمود کے مرکزوں کی صورت میں دیکھا گیا۔

اگر نظام کی کل کمیت مہ ہے اور ک ایک مقدار اس طرح منتخب کی جائے کہ

$$مہ\ ک^2 = \sum م ر^2 \quad یا \quad مہ\ ک^2 = \int ر^2 د م$$

تو مقدار ک کو نظام کا گردش کا نصف قطر کہتے ہیں محور کے گرد۔ جمود کے معیار اثر کو ہم بالعموم صرف ج سے تعبیر کرینگے۔

جمود کے معیار اثر معلوم کرنیکا عمل مسائل ذیل کی مدد سے آسان ہو جاتا ہے

(۱) و لا، و ما، و ی تین قائم محور ہیں، ایک مستوی پتر مستوی لا و ما میں واقع ہے اور اس کے جمود کے معیار اثر و لا، و ما، و ی کے گرد بالترتیب $ج_{لا}$، $ج_{ما}$، $ج_{ی}$ ہیں۔ تب

$$ج_{ی} = ج_{لا} + ج_{ما}$$

(۲) کسی محور و ر کے گرد جمود کا معیار اثر $ج_{ر}$ ہے، جسم کے مرکز جمود ث میں سے گذرنے والے متوازی محور کے گرد معیار اثر $ج_{ث}$ ہے اور ان محوروں کا باہمی فاصلہ ل ہے۔ تب

$$ج_{ر} = ج_{ث} + مہ\ ل^2$$

جہاں مہ نظام کی کل کمیت ہے۔

ان مسائل کے ثبوت نہایت آسان ہیں، یہ طالب علم کے لئے چھوڑ دئے گئے ہیں

علم جبل کی کسی کتاب میں مل سکینگے۔

مثال ۱۔ یکساں کثافت کی ایک پتلی سیدھی سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو سلاخ کے ایک سرے میں سے گذرتا ہے اور اس پر عمود دار ہے۔

فرض کرو کہ سلاخ پر کے کسی نقطہ کا فاصلہ محور سے لا ہے، لما خطی کثافت ہے اور ل سلاخ کا طول ہے۔ کمیت کا جزو لما مف لا فرض کرو۔ پس

$$\text{جمود کا معیار اثر} = \int_{0}^{\text{ل}} \text{لا}^2 \times \text{لما مف لا} = \frac{1}{3}\,\text{لما ل}^3 = \frac{1}{3}\,\text{م ل}^2$$

جہاں م = لما ل سلاخ کی کمیت ہے، پس گردش کا نصف قطر ک = $\frac{\text{ل}}{\sqrt{3}}$

اگر گردش کا محور سلاخ کے نقطہ تنصیف میں سے گذرے اور سلاخ پر عمود دار ہو تو اسکے گرد معیار $\frac{\text{م ل}^2}{12}$ ہوگا۔ یہ بلا واسطہ ثابت کیا جاسکتا ہے یا مسئلہ (۲) کو استعمال کرنے سے۔

مثال ۲۔ یکساں مستطیل پترے کے جمود کا معیار ایک ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اس کے ایک ضلع کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ اضلاع کے طول ا، ب ہیں ا ر محور ضلع ا کے متوازی ہے۔ پترے کو ایسے باریک ٹکڑوں میں تقسیم کرو جو ضلع ب کے متوازی ہوں، فرض کرو کہ ایک ٹکڑے کی کمیت مف م ہے اور کل پترے کی م۔

مثال (۱) کی رو سے مف م کا معیار محور کے گرد مف م $\times \frac{\text{ب}^2}{12}$ ہے اسلئے کل مستطیل کے جمود کا معیار اثر $\frac{1}{12}\,\text{م ب}^2$ ہوا۔

اگر گردش کا محور مرکز میں سے گذرے اور ضلع ب کے متوازی ہو تو اس کے گرد جمود کا معیار $\frac{\text{م ا}^2}{12}$ ہوگا، اس لئے مسئلہ (۱) کی رو سے جمود کا معیار ایک ایسے محور کے گرد جو مرکز میں سے گذرے اور پترے کی سطح پر عمود دار ہو $\frac{\text{م}(\text{ا}^2+\text{ب}^2)}{12}$ ہوگا۔

اُوپر کے نتائج کو استعمال کرنے سے ہم ایک یکساں مستطیلی متوازی السطوح کا معیار ایک ایسے محور کے گرد باسانی معلوم کر سکتے ہیں جو مرکز میں سے گذرے اور ایک کنارے کے متوازی ہو۔ فرض کرو کہ متوازی السطوح کے کنارے ا، ب، ج ہیں اور گردش کا محور کنارہ ج کے متوازی ہے۔ مجسم کو کمیت مف م کی پتلی قاشوں میں تقسیم کرو جو کنارہ ج پر عمود وار ہوں۔ ایک قاش کے جمود کا معیار اثر مندرجہ بالا نتیجہ کی رُو سے مف م $\frac{ا^2 + ب^2}{۱۲}$ ہے اس لئے مجسم کا معیار $\frac{م(ا^2+ب^2)}{۱۲}$ ہے جہاں م مجسم کی کمیت ہے۔

مثال ۳۔ یکساں ناقص پترے کے جمود کا معیار محور اعظم کے گرد۔

ایسے خطوط کے ذریعہ جو محور اصغر کے متوازی ہوں پترے کو کمیت مف م کے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔

مثال (۱) کی رو سے اس ٹکڑے کا معیار مف م × $\frac{(۲\,ما)^2}{۱۲}$ یعنی مف م × $\frac{ما^2}{۳}$ ہے جہاں ما ٹکڑے کا معین ہے۔

اگر پترے کی کثافت ک ہو تو مف م = ۲ک ما مف لا، اسلئے

$$ج = \int \tfrac{1}{۳}\,ما^2\,مف\,م = \frac{۲ک}{۳}\int_{0}^{ا} ما^3\,مف\,لا = \frac{۴ک}{۳} \times \frac{ب^3}{ا^3}\int_{0}^{ا} (ا^2-لا^2)^{\frac{3}{2}}\,ولا$$

لیکن $\int_{0}^{ا} (ا^2-لا^2)^{\frac{3}{2}}\,ولا = ا^4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جم^4 طہ\, وطہ = \frac{۳\pi}{۱۶}\,ا^4$ [لا کی بجائے ا جب طہ رکھنے سے]

کل کمیت م = π ک ا ب

اسلئے ج = $\frac{1}{۴}\,\pi$ ک ا ب^3 = $\frac{1}{۴}$ م ب^2

محور اصغر کے گرد معیار $\frac{م ا^2}{۴}$ ہے اور مرکز میں سے گذرنیوالے محور کے گرد جو پترے کی سطح پر عمود وار ہو معیار م $\frac{ا^2+ب^2}{۴}$ ہے۔

دائرہ کی صورت میں معیار ایک قطر کے گرد $\frac{م\,ر^{۲}}{۴}$ ہوگا [ب کو ر کے مساوی رکھنے سے] اور مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد جو پتر کی سطح پر عمود وار ہو معیار $\frac{م\,ر^{۲}}{۲}$ ہوگا۔

[illegible] ... بار یک ہم مرکز ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے بآسانی حاصل ہو سکتی ہے پھر چونکہ تشاکل کی رو سے تمام قطروں کے گرد جمود کے معیار اثر مساوی ہوں گے اسلئے مسئلہ (۱) سے ظاہر ہے کہ کسی قطر کے گرد کا معیار اس محور کے گرد کے معیار کا آدھا ہوگا جو مرکز میں سے گزرتا ہے اور سطح پر عمود وار ہے۔

مثال ۴۔ یکساں ناقص نما کے جمود کا معیار اثر و ع کے گرد۔ متوازی تراشوں سے جو و ع پر عمود وار ہوں ناقص نما کو پتلی قاشوں میں تقسیم کرو۔

ایسی ایک تراشش کی کمیت مفا م $= \pi$ ک ب ج $\left(۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)$ مفلا

اور گزشتہ مثال کی رو سے مفا م کا معیار و ع کے گرد $\frac{۱}{۴}$ مفا م $(ا_{۱}^{۲} + ب_{۱}^{۲})$

جہاں ۲ $ا_{۱}$، ۲ $ب_{۱}$ اس تراشش کے محور ہیں۔

لیکن $ا_{۱}^{۲} =$ ب$^{۲}\left(۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)$، $ب_{۱}^{۲} =$ ج$^{۲}\left(۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)$

قیمتیں مندرج کرنے اور ـ ا سے ا تک تکمل کرنے سے جمود کا معیار اثر

$$= \frac{۱}{۴}\,\pi\ \text{ک ب ج}\ (\text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲}) \int_{-ا}^{ا} \left(۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)^{۲} \text{ فلا}$$

$$= م\ \frac{\text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲}}{۵} \quad \text{جہاں } م = \frac{۴\,\pi\ \text{ک ا ب ج}}{۳}$$

= ناقص نما کی کمیت

دوسرے محوروں کے گرد کے معیار از روئے تشاکل حاصل ہو سکتے ہیں۔

۳۰ ـ حجم کا قطبی جزو ـ طبیعی مثالوں میں کسی نقطہ ن کے گرد کی قطبی محوروں

ر، طہ، فہ (دفعہ ۸۹ ، حصہ اول) کی رقوم میں حجم کا جزو مف ح مطلوب ہوتا ہے۔

نقطہ ن اور محور ق سے ہیں سے جو سطح مستوی گذرتی ہے اسے عہ سے تعبیر کرو۔ سب سے پہلے ر اور فہ کو مستقل رکھو اور فرض کرو کہ طہ ہو جاتا ہے طہ + مف طہ اس طرح ن ت ایک دائرہ کی قوس ن ق سطح عہ میں مرتسم کرتا ہے اور ن ق = ر مف طہ اسکے بعد فرض کرو کہ محدد ر، طہ مستقل رہتے ہیں اور سطح عہ، و سے گرد بطور محور کے چھوٹے زاویہ مف فہ میں سے گھومتی ہے۔ ن ایک قوس ن م = ر جب طہ مف فہ مرتسم کریگا اور اگر

مف طہ مستقل رہے تو قوس ن ق کے گھومنے سے ایک رقبہ مف س پیدا ہوگا جو تقریباً قوس ن ق × قوس ن م یعنی ر² جب طہ مف طہ مف فہ کے مساوی ہوگا۔ آخرالامر طہ، فہ، مف طہ، مف فہ کو مستقل رکھو اور فرض کرو کہ ر بدلکر ر + مف ر ہو جاتا ہے۔ رقبہ مف س حجم کا ایک جزو مف ح پیدا کرے گا جو تقریباً مف س × مف ر یعنی

ر² جب طہ مف ر مف طہ مف فہ کے مساوی ہوگا۔

مف ح کی انتہا حجم کا قطبی جزو ہے، پس

ف ح = ا ر² جب طہ فر فطہ فہ

ایک کرہ کا نصف قطر ر ہے، اسکی سطح کا جزو

ف س = ر² جب طہ فطہ فہ

فرض کرو کہ ر = ف (طہ) ایک منحنی کی قطبی مساوات ہے جو سطح مستوی سے ولا میں واقع ہے اور و سے خط ابتدائی ہے، ف ح کو فہ = ۰ سے فہ = ۲ π تک اور پھر ر = ۰ سے ر = ف (طہ) تک تکمیل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تدویری یا گردشی سطح کے حجم کا قطبی جزو $\frac{۲}{۳}$ π ر³ جب طہ فطہ ہے جہاں اس میں ر سے مراد ف (طہ) ہے۔

فرض کرو کہ سطح پر کوئی نقطہ ن (لا، ما، ی) ہے اور ایک مستطیلی متوازی السطوح جو قاعدہ مف لا مف ما پر کھڑا کیا جائے وہ سطح سے رقبہ کا جزو مف لعہ کاٹتا ہے اور ن پر کی مماسی سطح سے مف لعہ۔ اگر ن پر کی مماسی سطح پر کا عماد و کے ساتھ زاویہ گہ بنائے تو

مف لعہ جم گہ = مف لا مف ما

∴ مف لعہ = مف لا مف ما قط گہ

اگر مف لعہ / مف لعہ کی انتہا ہم ایک مان لیں تو

فر لعہ = فر لا فر ما قا گہ

عماد کی سمتی جیوب التمام معلوم ہو سکتی ہیں جبکہ سطح کی مساوات معلوم ہو (دفعہ ۹۱ حصۂ اول) اس طرح سے فر لعہ متغیرات لا، ما، جف ی / جف لا، جف ی / جف ما کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

تعریفات ۔ مصطلحات خطی تکملہ اور سطحی تکملہ کثیر الاستعمال ہیں، انکی تعریف کر دینا مناسب ہوگا اگرچہ انکی خاصیتوں اور تعلقات کی بحث کے لئے اس جگہ گنجایش نہیں۔

فرض کرو کہ ص ایک ایسی مقدار ہے جو سمت اور مقدار دونوں رکھتی ہے جیسے رفتار یا قوت۔ اور ایک منحنی ا ب ف کے کسی نقطہ ن پر ص کی سمت اور ن پر کے مماس کی سمت میں زاویہ صہ بنتا ہے۔ اگر س اس قوس کا طول ہو جو منحنی پر کے ایک ثابت نقطہ اور ن کے درمیان ہے تو تکملہ

∫ ص جم صہ فر س .... (۱)

کو ہم ص کا خطی تکملہ منحنی ا ب کے ساتھ ساتھ کہینگے جبکہ تکملہ کو س کی اس قیمت سے جو ا پر ہے ب تک کی قیمت تک لیا جائے۔

مثلاً دفعہ ۹۵ حصۂ اول میں کام کر قوت ف کا خطی تکملہ ہے منحنی ا ن کے ساتھ ساتھ۔ اگر سمتی ص کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما، ے ہوں تو تکملہ (۱) کو اس طرح بھی لکھہ سکتے ہیں [دفعہ ۹۵ (۳)، حصۂ اول]

$\int$ (لا $\frac{فر لا}{فر س}$ + ما $\frac{فر ما}{فر س}$ + ے $\frac{فر یا}{فر س}$) فر س ..... (۲)

نیز فرض کرو کہ صف س سطح کا ایک جزو ہے ، ن جزو [illegible] پر ایک نقطہ ہے اور سطح کے نقطہ ن پر کے عماد اور ص کی سمت کے درمیان زاویہ صوہ بتا ہے ، تب

تکملہ $\int$ ص جم صوہ فر س .... (۳)

کو جب سطح کے کسی حصہ پر لیا جائے تو ہم اس کو ص کا سطحی تکملہ اس حصہ پر کہینگے۔ مثلاً اگر ن پر برقی حدت ص ہو تو حدت کا عمادی جزو ترکیبی ع = ص جم صوہ اور تکملہ (۳) سے عمادی برقی حدت کا سطحی تکملہ مراد ہوگا سطح کے مذکورہ حصہ پر ۔

مشق ۹

۱- ما^۲ کی اوسط قیمت سعت ۰ تا ۲π میں معلوم کرو جبکہ

(۱) ما = ا$_۱$ جب لا + ا$_۲$ جب ۲ لا + ... + ا$_ن$ جب ن لا

(۲) ما = ب$_۱$ جم لا + ب$_۲$ جم ۲ لا + ... + ب$_ن$ جم ن لا

۲- اگر ما = ا$_۱$ جب لا + ب$_۱$ جم لا + ا$_۲$ جب ۲ لا + ب$_۲$ جم ۲ لا

اور یا = ا$_۱$ جب لا + ب$_۱$ جم لا + ا$_۲$ جب ۲ لا + ب$_۲$ جم ۲ لا

تو حاصل ضرب ما یا کی اوسط قیمت سعت ۰ تا ۲π کے اندر معلوم کرو۔

۳- ایک ذرہ حالت سکون سے آزادانہ گرتا ہے ، ثابت کرو کہ اسکی اوسط رفتار بلحاظ وقت کے آخری رفتار کی نصف ہے اور اسکی اوسط رفتار بلحاظ فاصلہ کے آخری رفتار کی دو تہائی ہے ۔

۴- کمیت م کا ایک ذرہ اپنی حرکت سے سادہ موسیقی حرکت پیدا کرتا ہے جسکا

حیطہ l ہے اور مدت دوران t ۔ ثابت کرو کہ اسکی اوسط توانائی بالحرکت اس کی توانائی بالحرکت کی قیمت اعظم کی نصف ہے۔

۵۔ اگر ایک مستوی رقبہ کو متجانس مائع کے اندر ڈبو یا جائے تو ثابت کرو کہ حادثہ زیر غور کے زیر عمل رقبہ کے دباؤ کی اوسط حدت وہی ہوگی جو رقبہ کے ہندسی مرکز پر دباؤ کی حدت ہے۔

۶۔ زمین کے مرکز سے فاصلہ r پر کثافت $k = \frac{k \sin l r}{l r}$ جہاں l مستقل ہے ثابت کرو کہ اوسط کثافت

$$3k(\sin l r - l r \cos l r)/l^3 r^3$$

ہے جہاں r زمین کا نصف قطر ہے۔　[یمپ کا احصا]

حجم کا جزو δv لو جہاں δv نصف قطر r اور $r+\delta r$ والی دو کروی سطحوں کے درمیان کے خول کا حجم ہے۔ $\delta v = 4\pi r^2 \delta r$ اور $\delta m = k\,\delta v$۔ کل کمیت $k\,\delta v$ کو $r=0$ سے r تک تکمیل کرنے سے حاصل ہوگی۔

۷۔ ذیل کی صورتوں میں جو رقبے یا حجم ہیں اُن کے ہندسی مرکز معلوم کرو۔

(۱) رقبہ جو مکافی کی قوس، محور اور (h، k) میں سے گذرنے والے سعین کے درمیان گھرا ہوا ہے۔

(۲) قطعہ مکافی جو راس اور نقطہ (h، k) کے ملانے والا خط مستقیم منحنی سے قطع کرتا ہے۔

(۳) قطعہ ب ع ج (شکل ۴۷)

(۴) کروی قطاع جو قطاع دائرہ و ع ب (شکل ۴۷) کو و ع کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔

(۵) خط صنوبری $r = a(1 + \cos\theta)$

۸۔ ایک نصف کرہ کے کسی نقطہ پر کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے احاطہ کرنے والی مستوی سطح سے اس نقطہ کا فاصلہ۔ ثابت کرو کہ اس سطح سے مرکز جمود کا فاصلہ $\frac{8a}{15}$ ہے جہاں a نصف قطر ہے۔

۹۔ پیپس کے مسئلے ثابت کرو یعنی

(ب، ج، د) کے فاصلے محور سے ا، ب ہوں تو ثابت کرو کہ مجسم کی گردش کا

نصف قطر ک^2 = $\frac{1}{2}$ (ا^2 + ب^2)

۱۲- لنگر چھلے (مشق ۷، مثال ۵) کے جمود کا معیار اثر محور کے گرد

م (ج^2 + $\frac{3}{4}$ ا^2) ہے اگر جسم کی کثافت یکساں فرض کی جائے۔

۱۳- اگر ر^2 = لا^2 + ما^2 + یا^2 تو ثابت کرو کہ ر^2 کی اوسط قیمت ناقص نما

$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{یا^2}{ج^2} = 1$ کے حجم بھر میں $\frac{ا^2 + ب^2 + ج^2}{5}$ ہے۔

۱۴- اُس خانہ کا حجم جو اسطوانہ لا^2 + ما^2 = ۲ ا لا اور مستوی سطوح

ی = لا مس عما اور ی = لا مس یما کے درمیان گھرا ہوا ہے

π (مس یما - مس عما) ہے۔

۱۵- اگر ن > ۰ تو تکملہ $\int_0^\infty$ ﻫ$^{-لا}$ لا$^{ن-1}$ فلا کی ایک معین قیمت ہے۔

یہ تکملہ ن کا تفاعل ہے جسے بالعموم گاما تفاعل کہتے ہیں، اسے ہم علامت جا (ن)

سے تعبیر کرتے ہیں۔

تکمل بالحصص سے ثابت کرو کہ

جا (ن) = (ن - ۱) جا (ن - ۱) .... (۱)

اور جس صورت میں ن صحیح عدد ہو تو جا (ن) = $\underline{ن - 1}$، جا (۱) = ۱

اگر ن صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ ن سے عین چھوٹا صحیح عدد ذ ہے، یعنی

(ن - د) کسر واجب ہے۔ تب (۱) سے ظاہر ہے کہ

جا (ن) = (ن - ۱) (ن - ۲) ..... (ن - د) جا (ن - د) ..... (۲)

۱۶- ثابت کرو کہ

(۱) جا ($\frac{1}{2}$) = $\sqrt{\pi}$

(۲) جا (م + $\frac{1}{2}$) = $\frac{2م - 1}{2} \times \frac{2م - 3}{2} \times ..... \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ [م صحیح عدد]

دفعہ ۷۶ مثال ۳ میں لا = $\sqrt{ی}$ رکھنے سے مساوات (۱) حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty قو^{-لا^2} فرلا = \frac{1}{2}\int_0^\infty قو^{-ی} ی^{-\frac{1}{2}} فری = \frac{1}{2} جا(\tfrac{1}{2})$$

پھر مساوات (۲) حاصل ہوتی ہے مثال ۱۵ (۲) مندرجہ بالا سے۔

۱۷ـ ثابت کرو کہ $\int_0^\infty قو^{-لا^د} لا^{ن-1} فرلا = \frac{جا(\frac{ن}{د})}{د}$ [د مثبت]

۱۸ـ مندرجہ ذیل ابدال استعمال کرنے سے جا(ن) کے لئے اور ضابطے ثابت کرو

$$لا = ر^2 \text{،} \quad جا(ن) = 2\int_0^\infty قو^{-ر^2} ر^{2ن-1} فرر \quad .... (1)$$

$$قو^{-لا} = ی \text{،} \quad جا(ن) = \int_0^1 (لوک \frac{1}{ی})^{ن-1} فری \quad ..... (2)$$

۱۹ـ جب، م اور ن دونوں مثبت ہوں تو تکملہ

$$\int_0^1 لا^{م-1} (1-لا)^{ن-1} فرلا$$

کی ایک معین قیمت ہے، یہ قیمت م اور ن کا تفاعل ہوگی، اسے بیٹا تفاعل کہتے ہیں، ہم اسے با(م، ن) سے تعبیر کریں گے

ثابت کرو کہ با(م، ن) = با(ن، م)

۲۰ـ مندرجہ ذیل ابدال استعمال کرنے سے، با(م، ن) کے لئے اور ضابطے حاصل کرو

$$لا = جم^2 طہ \text{،} \quad با(م، ن) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} جم^{2م-1} طہ\, جب^{2ن-1} طہ\, فرطہ \quad ....(1)$$

$$لا = \frac{1}{1+ما} \text{،} \quad با(م، ن) = \int_0^\infty \frac{ما^{ن-1} فرما}{(1+ما)^{م+ن}} \quad .... (2)$$

۲۱ـ مثال ۱۸ کی شکل (۱) کو استعمال کرنے سے لکھو

$$\text{جا(م)} = ۲\int_{۰}^{\infty} \text{و}^{-\text{لا}^۲}\,\text{لا}^{۲م-۱}\,\text{فرلا}، \quad \text{جا(ن)} = ۲\int_{۰}^{\infty} \text{و}^{-\text{ما}^۲}\,\text{ما}^{۲ن-۱}\,\text{فرما}$$

اور پھر دفعہ ۲۷، مثال ۳ کی مانند دکھاؤ کہ

$$\text{جا(م)} \times \text{جا(ن)} = ۴\int_{۰}^{\infty} \text{و}^{-\text{ر}^۲}\,\text{ر}^{۲(م+ن)-۱}\,\text{فرر} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۲م-۱}\text{طہ}\,\text{جب}^{۲ن-۱}\text{طہ}\,\text{فرطہ}$$

اس لئے اشلہ ۱۸ (۱) اور ۲۰ (۱) کی مدد سے

$$\text{جا(م)}\,\text{جا(ن)} = \text{جا(م + ن)}\,\text{با(م، ن)}$$

اس طرح بیٹا تفاعل گاما تفاعل کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

۲۴۔ فرض کرو کہ ۲م - ۱ = ف، ۲ن - ۱ = ق، تب اشلہ ۲۰ (۱) اور ۲۱ سے

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ف}}\text{طہ}\,\text{جب}^{\text{ق}}\text{طہ}\,\text{فرطہ} = \frac{\text{با(م، ن)}}{۲} = \frac{\text{جا}\left(\frac{\text{ف}+۱}{۲}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{ق}+۱}{۲}\right)}{۲\,\text{جا}\left(\frac{\text{ف}+\text{ق}+۲}{۲}\right)}$$

جہاں چونکہ م > ۰، ن > ۰، اسلئے $\frac{۱}{۲}$(ف + ۱) > ۰ اور $\frac{۱}{۲}$(ق + ۱) > ۰۔
یعنی ف اور ق میں سے ہر ایک -۱ سے بڑا ہے۔

طالب علم اس کی جانچ کرے کہ اس نتیجہ میں دفعہ ۱۰ کا قاعدہ شامل ہے۔

لوک جا(ن) کی جدولیں ۱ ≦ ن ≦ ۲ کے لئے مرتب کی گئی ہیں
(مثال ۱۵ (۲) کی رو سے ن کے لئے اس سے بڑی وسعت کی ضرورت نہیں)
کئی تکملے گاما تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

۲۳۔ ایک کرہ کا نصف قطر ا ہے، اس کی سطح پر کمیت م یکساں طور پر پھیلا دی گئی ہے (کثافت کہ)، اس کمیت کا قوہ و کسی نقطہ ع پر معلوم کرو۔

کرہ کے مرکز و کو مبدا مانو اور وع کو محور سے، فرض کرو کہ نقطہ ح پر کرہ کی سطح کا جزو فرس ہے۔ فرض کرو کہ ح ع = ر اور و ع = ج

$$\text{و} = \int \frac{\text{کہ}\,\text{فرس}}{\text{ح ع}}، \quad \text{فرس} = \text{ا}^۲\,\text{جب طہ}\,\text{فرطہ}\,\text{فرفہ}، \quad \text{ر}^۲ = \text{ا}^۲ + \text{ج}^۲ - ۲\text{اج جم طہ}$$

فہ کے لئے حدود ۰ تا ۲π ہیں اور طہ کے ۰ تا π - بلحاظ فہ کے تکمل کرنے میں دوسرا متغیر طہ اور اس لئے اس صورت میں ب ع یعنی س (جو طہ کا تفاعل ہے اور فہ کا نہیں ہے) مستقل رکھا جائیگا۔ اس لئے

ق = کہ ا۲ ∫۰^π جب طہ فر طہ / س ∫۰^۲π فر فہ = ۲π کہ ا۲ ∫۰^π جب طہ فر طہ / س

اب متغیر کو طہ سے س میں بدلو، اس طرح حاصل ہوگا س فر س = ا ج جب طہ فر طہ
جب طہ = ۰ تو س = ± (ا - ج)، س ایک مثبت عدد ہے، پس اگر ع کرہ کے باہر ہو تو س = ج - ا اور اگر ع کرہ کے اندر ہو تو س = ا - ج
اگر طہ = π تو س = ا + ج دونوں صورتوں میں۔

اسلئے　ق = ۲π کہ ا۲ [س / ا ج] = ۴π کہ ا۲ / ج　(ع کرہ کے باہر)......(۱)

= ۴π کہ ا　(ع کرہ کے اندر)......(۲)

پس ق = م / ج جبکہ ع کرہ کے باہر ہو لیکن ق = م / ا مستقل جبکہ ع کرہ کے اندر ہو۔

۲۴ - وہی سوال جو مثال ۲۳ میں ہے مجسم کرہ کے لئے [کثافت ک مستقل]

نصف قطر ر اور ر + فر ر کی کری سطحوں کے درمیان جو خول ہے اسکو کمیت کا جزو قرار دو۔ مثال ۲۳ کے کہ کی بجائے ک فر ر اور ا کی بجائے ر رکھکر اسکے نتائج کو استعمال کرو۔

اگر ع باہر واقع ہو تو نتیجہ (۱) سے حاصل ہوگا

ق = ∫۰^ا ۴π ک ر۲ فر ر / ج = ۴π ک / ۳ · ا۳ / ج ......(۳)

اگر ع کرہ کے اندر ہو تو ق دو حصوں پر مشتمل ہوگا ق۱ اور ق۲۔

تو ق_1 نصف قطر ج کے کرہ کی وجہ سے پیدا ہوگا اور اوپر کے نتیجہ کی مدد سے

$$\text{ق}_1 = \frac{4\pi\,\text{ک}}{3} \times \frac{\text{ج}^3}{\text{ج}} = \frac{4\pi\,\text{ک}}{3}\,\text{ج}^2$$

تو ق_2 اس خول کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے جس کے نصف قطر ج اور ا ہیں۔
مثال ۲۳ کے نتیجہ (۲) کی رو سے

$$\text{ق}_2 = \int_{\text{ج}}^{\text{ا}} 4\pi\,\text{ک}\,\text{ر}\,d\text{ر} = 2\pi\,\text{ک}\,(\text{ا}^2 - \text{ج}^2)$$

اسلئے

$$\text{ق} = \text{ق}_1 + \text{ق}_2 = 2\pi\,\text{ک}\left(\text{ا}^2 - \frac{1}{3}\,\text{ج}^2\right) \quad \ldots\ldots(4)$$

جب ج = ا تو (۳) اور (۴) سے جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ایک ہی ہیں۔

باب چہارم

انحنا لفاف

۱۳۲ — انحنا - فرض کرو کہ ایک مستوی منحنی پر نقطے ن اور ق ہیں اور ن اور ق پر کے مماس محور لا کے ساتھ زاویے فا، فا + مف فا بناتے ہیں اور منحنی پر کے کسی ثابت نقطہ سے ن تک کی قوس کا طول س ہے اور قوس ن ق، مف س ہے، ن اور ق پر کے مماسوں کا درمیانی زاویہ مف فا ہوگا (شکل ۲۹، صفحہ ۱۴۱)

تعریفات: (۱) زاویہ مف فا قوس ن ق کا کل انحنا کہلاتا ہے۔

(۲) حاصل قسمت $\frac{\text{مف فا}}{\text{مف س}}$ کو قوس ن ق کا اوسط انحنا کہتے ہیں۔

(۳) $\frac{\text{مف فا}}{\text{مف س}}$ کی انتہا $\frac{\text{فر فا}}{\text{فر س}}$ کو جبکہ ق انتہائی صورت میں ن کے لاانتہا قریب آجائے منحنی کا انحنا نقطہ ن پر کہتے ہیں۔

ایک دائرہ کے لئے جس کا نصف قطر ر ہو مف س = ر مف فا

اسلئے $\frac{\text{مف فا}}{\text{مف س}} = \frac{1}{\text{ر}}$، $\frac{\text{فر فا}}{\text{فر س}} = \frac{1}{\text{ر}}$ .... (۱)

یعنی دائرہ کی کسی قوس کا اوسط انحنا دائرہ کے کسی نقطہ پر کے انحنا کے مساوی ہوتا ہے، دوسرے الفاظ میں دائرہ ایک ایسا منحنی ہے جس کا انحنا مستقل ہے اور اس کا انحنا اسکے نصف قطر کے مقلوب کے مساوی ہے۔

انحنا ایک ایسی مقدار ہے جس کا بعد طول کے لحاظ سے - ۱ ہے۔

انحنا کسی نقطہ کے معین کے پہلے اور دوسرے مشتقوں کی رقوم میں بیان ہوسکتا ہے اور وہ اس طرح

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\ ،\ \text{جم فہ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

پہلی مساوات کو بلحاظ س کے تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر مس فہ}}{\text{فرفہ}} \times \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

یعنی $\text{قط}^{2}\,\text{فہ}\ \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} \div \text{قط فہ}$

اسلئے $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} \div \text{قط}^{3}\,\text{فہ}$ .... (۲)

اب چونکہ $\text{قط}^{2}\,\text{فہ} = 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2}$ اسلئے

$$\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} \div \left\{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2}\right\}^{\frac{3}{2}} \text{............ (ك)}$$

(ك) کو اساسی ضابطہ تصور کیا جائے۔

نتیجہ صریح جس صورت میں ڈھال $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اسقدر چھوٹا ہو کہ ساتھ زیر بحث میں اسکا مربع نظر انداز ہوسکے تو انحنا تقریباً $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}$ ہوگا، علم حیل میں خاصکر شہتیروں کے جھکنے کے نظریہ میں یہ تقریبی قیمت اکثر استعمال ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ مکافی $\text{ما}^{2} = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{2\text{ا}}{\text{ما}}\ ،\ \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = -\frac{2\text{ا}}{\text{ما}^{2}}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{4\text{ا}^{2}}{\text{ما}^{3}}$$

$$\frac{فر فہ}{فر س} = \frac{-۴ و^۲}{ما^۳} \div \left\{ ۱ + \frac{۴ و^۲}{ما^۲} \right\}^{\frac{۳}{۲}} = \frac{-۴ و^۲}{(ما^۲ + ۴ و^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

اگر ن (لا، ما) پر کا عماد محور سے گ پر ملے تو

$$ن گ^۲ = ما^۲ + ۴ و^۲ \quad \text{اور} \quad \frac{فر فہ}{فر س} = -\frac{۴ و^۲}{ن گ^۳}$$

منفی علامت کے مفہوم کی طرف دفعہ ۳۲ میں توجہ کی جائیگی۔

مثال ۲۔ ناقص، $\frac{لا^۲}{و^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$

$$\frac{فر ما}{فر لا} = -\frac{ب^۲ لا}{و^۲ ما}، \quad \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} = -\frac{ب^۲}{و^۲ ما} + \frac{ب^۲ لا}{و^۲ ما^۲}\left(-\frac{ب^۲ لا}{و^۲ ما}\right) = -\frac{ب^۴}{و^۲ ما^۳}$$

کیونکہ ناقص کی مساوات سے $ب^۲ لا^۲ + و^۲ ما^۲ = و^۲ ب^۲$

اس لئے $\frac{فر فہ}{فر س} = -\frac{و^۴ ب^۴}{(ب^۴ لا^۲ + و^۴ ما^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

اگر مرکز سے نقطہ (لا، ما) پر کے مماس پر عمود کھینچا جائے اور اس کا طول ع ہو تو

$$ع = \frac{و^۲ ب^۲}{(ب^۴ لا^۲ + و^۴ ما^۲)^{\frac{۱}{۲}}} \quad \text{اور} \quad \frac{فر فہ}{فر س} = -\frac{ع^۳}{و^۲ ب^۲}$$

اگر ن گ نقطہ ن (لا، ما) پر کا عماد ہو تو

$$ن گ^۲ = \frac{ب^۴ لا^۲ + و^۴ ما^۲}{و^۴} \quad \text{اور} \quad \frac{فر فہ}{فر س} = -\frac{ب^۴}{و^۲ ن گ^۳}$$

اسی طرح کا نتیجہ زائد کے لئے درست ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی مخروطی تراش کا انحنا عماد کے مکعب کے بالعکس بدلتا ہے۔

۳۲ ۔ دائرۂ انحنا، نصف قطر، مرکز دائرہ انحنا۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے عماد نقطہ ح پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل ۲۹) جب، ق انتہائی صورت میں ن پر آئیگا تو عمادوں کا نقطہ

تقاطع حؔ انتہائی صورت میں نؔ پر کے عماد پر ایک انتہائی مقام حؔ اختیار کریگا اور اِس حالت میں نؔ حؔ، $\frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}}$ کے مساوی ہوگا۔

کیونکہ $\angle$ ن حؔ ق = مف فہ اور

$$\frac{\text{ن حؔ}}{\text{جب ن ق حؔ}} = \frac{\text{وتر ن ق}}{\text{جب ن حؔ ق}} = \frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{مف فہ}} \times \frac{\text{مف فہ}}{\text{جب مف فہ}}$$

شکل ۲۹

ن ق حؔ کی انتہا ۹۰° ہے اور موخرالذکر تین کسروں کی انتہائیں بالترتیب ۱، $\frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}}$، ۱ ہیں، اِس لئے نؔ حؔ کی انتہا $\frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}}$ ہے اور یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

اِس لئے اگر حؔ کو مرکز، حؔ نؔ کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو نقطہ نؔ پر اِس کا مماس اور انحنا دونوں وہی ہونگے جو مفروضہ منحنی کے نقطہ نؔ پر ہیں۔

اِس دائرہ کو دائرہ انحنا کہتے ہیں، اس کا نصف قطر حؔ یا $\frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}}$

نصف قطر انحنا کہلاتا ہے اور اس کا مرکز ح جو حن پر ہے دائرۂ انحنا کا مرکز کہلاتا ہے۔ اگر حن میں سے گذرنے والا کوئی خط دائرہ کو دوبارہ ط پر ملے تو حن ط کو انحنا کا وتر کہتے ہیں۔

اگر حن کے محدد (لا، ما) ہوں، ح کے (ضا، عا) اور انحنا کے نصف قطر حن ح یعنی $\frac{\text{فر س}}{\text{فر فہ}}$ کو س سے تعبیر کیا جائے تو یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ

ضا = لا − س جب فہ، عا = ما + س جم فہ .... (۱)

ہم نصف قطر انحنا کو بالعموم س سے تعبیر کرینگے، اس طرح انحنا $\frac{1}{\text{س}}$ سے تعبیر ہوگا۔

اگر $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ نقطہ حن پر صفر ہو تو (۱) کی رو سے س یا حن ح لامتناہی ہوگا پس معلوم ہوا کہ منحنی کے نقطہ انعطاف پر س لامتناہی ہوتا ہے۔

شکل ۲۹ کو ہم معیاری تصویر مانینگے، اگر اس قرارداد کو ہم تسلیم کرلیں کہ فہ ہمیشہ حادہ ہوگا (دفعہ ۲ حصہ اول) تو $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}$ اور جم فہ ہمیشہ مثبت ہونگے اور (۱) میں جذر کی علامت مثبت ہوگی۔ اس لئے س اور $\frac{1}{\text{س}}$ دونوں مثبت ہونگے اگر $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ مثبت ہو اور دونوں منفی ہونگے اگر $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ منفی ہو یعنی س اور $\frac{1}{\text{س}}$ مثبت ہونگے اگر ن کے نزدیک منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو اور منفی ہونگے اگر منحنی اوپر کی طرف محدب ہو۔ اور قرارداد سے کام لیا جاسکتا ہے لیکن اگر شکل بنائی جائے تو ذراسی احتیاط سے علامت کا سوال طے ہو سکیگا۔ لیکن اکثر اوقات عددی قیمت ہی ضروری اور مطلوب ہوتی ہے۔

نقطہ ح کے انتہائی مقام ح کو بعض اوقات متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع کہتے ہیں، لیکن کوئی ایک عماد نہیں ہے جو کسی ایک عماد کا متصل ہو مگر اس طرز بیان میں بہ نسبت اسکے جو اس دفعہ کے شروع میں درج ہے اختصار ہے اس لئے بعض اوقات اسے استعمال کرتے ہیں۔

یہ قابل توجہ ہے کہ جب قوس ن ق رتبہ اول کا صغاریہ ہو تو ن ح اور ق ح کا فرق اعلیٰ رتبہ کا صغاریہ ہوگا کیونکہ $\frac{\text{ق ح - ن ح}}{\text{مف س}}$ کی انتہا صفر ہے اور وہ اسلئے کہ ق ح - ن ح = ق ح (۱ - جم مف فہ) - ن ق جم ف ن ح

۴۳۔ انحنا کے لئے اور ضابطے ۔ ضابطہ (۱) اتنا سہولت بخش ثابت نہیں ہوتا جبتک کہ منحنی کی مساوات اس شکل ما = ف (لا) میں نہ دی ہوئی ہو یا مشتقوں کی قیمتیں بآسانی نہ محسوب ہو سکیں جیسا کہ دفعہ ۴۱ کی مثالوں میں ہے۔ اسلئے ہم ایک دو ضابطے اس جگہ اور حاصل کرینگے۔ واضح ہو کہ ر کی علامت خاص توجہ کے قابل ہوتی ہے۔

(۱) لا = ف (ت)، ما = فا (ت) کی شکل کی مساوات۔
ہم لا، ما کے مشتقوں کو اختصار کی خاطر زبروں سے تعبیر کرینگے
(۱) میں عف ما، عف^2 ما کی قیمتیں لاَ، لاً، ماَ، ماً کی رقوم میں بیان کرو۔ یہ قیمتیں دفعہ ۹۸ حصۂ اول میں معلوم کی گئی ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}} = (\text{لاَ ماً} - \text{ماَ لاً}) / (\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots (\text{ب})$$

اب چونکہ $\text{عف}^2_{\text{لا}}\ \text{ما} = \frac{(\text{لاَ ماً} - \text{ماَ لاً})}{\text{لاَ}^3}$ اس لئے ہم نصف ر کی علامت حسب ضرورت دفعہ ۴۲ کی قرارداد کے موافق معلوم کر سکتے ہیں۔

(۲) قطبی مساواتیں۔ (۱) میں عف ما، عف^2 ما کی قیمتیں عف$_{\text{طا}}$ ر، عف$^2_{\text{طا}}$ ر کی رقوم میں مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{\text{ر}} = \left\{ \text{ر}^2 + 2\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طا}}\right)^2 - \text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ر}}{\text{فر طا}^2} \right\} \div \left\{ \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طا}}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots (\text{ج})$$

ضابطہ (ج) بے ڈول ہے، اکثر اوقات یہ زیادہ آسان ہوتا ہے کہ منحنی کی ع، ر مساوات معلوم کیجائے یعنی منحنی کے ہر نقطہ کے لئے عمود و سے (جو مبدا و سے کسی نقطہ حـ (شکل ۲۹) پر کے مماس پر کھینچا جائے) اور سمتی نیم قطر و ن کے درمیان ربط معلوم کیا جائے اور پھر انحنا معلوم کرنے کے لئے یہ ضابطہ استعمال کیا جائے جو ابھی ہم حاصل کرتے ہیں

شکل ۲۹ میں و سے = ع، و ن = ر

و حَ = و ن^۲ + ن حَ^۲ - ۲ و ن × ن حَ جم و ن حَ

= ر^۲ + ن حَ^۲ - ۲ ع × ن حَ

کیونکہ ع = و ن جم و ن حَ = ر جب سا جہاں سا صب معمولی مماس اور سمتی نیم قطر کا درمیانی زاویہ ہے۔

اگر و قَ = ر + مف ر اور ع + مف ع = عمود نقطہ و سے قَ کے مماس پر تو اسی طرح حاصل ہوگا

و حَ^۲ = (ر + مف ر)^۲ + قَ حَ^۲ - ۲ (ع + مف ع) قَ حَ

ن حَ^۲ کی دونوں قیمتیں مساوی رکھنے سے

۲ ر مف ر + (مف ر)^۲ + (قَ حَ - ن حَ) (قَ حَ + ن حَ - ۲ ع)

- ۲ قَ حَ مف ع = ۰

لیکن قَ حَ - ن حَ اور (مف ر)^۲ رتبہ اول سے بڑے رتبہ کے ہیں اسلئے بہ انتہا قَ حَ = ر فر ر / فر ع .... (د)

ضابطہ (د) اس طرح بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

چونکہ ع = ر جب سا اور فہ = ط + سا اسلئے (دفعہ ۸۸ حصہ اول)

$\frac{ف ر ع}{ف ر ر} =$ جب سا + رجم سا $\frac{ف سا}{ف ر} = \frac{ر ف طا}{ف س} + \frac{ر ف سا}{ف س} = \frac{ر ف فہ}{ف س}$

اسلئے $\frac{ف س}{ف فہ} = \frac{ر ف ر}{ف ر ع}$

اشکال کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جب منحنی مبدأ کی طرف منفعر ہو (جیساکہ قطع ناقص کی صورت میں جبکہ مرکز مبدأ ہو) تو ع اور ر ایک ساتھ بڑھتے اور گھٹتے ہیں

اس لئے $\frac{ف ر}{ف ع}$ اور س دونوں مثبت ہوتے ہیں۔ جب منحنی مبدأ کی جانب محدب ہو تو س منفی ہوتا ہے۔

اب ہم (ج) کو (د) سے حاصل کر سکتے ہیں کیونکہ (دفعہ ۸۸ حصہ اول سے)

$$س سا = \frac{ر ف طہ}{ف ر}$$

اور $\frac{۱}{ع^۲} = \frac{۱}{ر^۲ جبا سا} = \frac{۱}{ر^۲} + \left(\frac{۱}{ر^۲}\frac{ف ر}{ف طہ}\right)^۲ \quad \ldots\ldots (۱)$

اور بلحاظ ر کے تفرق کرنے سے ہم $\frac{ف ع}{ف ر}$ معلوم کر سکتے ہیں۔

اب ہم اس سے ذرا مختلف ضابطہ حاصل کریںگے جو علم حرکت میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔ رکھو ر = $\frac{۱}{ع}$، اس طرح س ع اور طہ کی رقوم میں حاصل ہوگا۔

$$\frac{ف ر}{ف طہ} = \frac{ف ر}{ف ع}\ \frac{ف ع}{ف طہ} = -\frac{۱}{ع^۲}\ \frac{ف ع}{ف طہ}$$

اس طرح مساوات (۱) ہو جائیگی

$\frac{۱}{ع^۲} = ع^۲ + \left(\frac{ف ع}{ف طہ}\right)^۲ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$

اب بلحاظ ع کے تفرق کرنے سے

$$-\frac{۲}{ع^{۳}}\frac{وع}{وع} = ۲ع + ۲\left(\frac{وع}{وط}\right)\frac{و^{۲}ع}{وط^{۲}}\frac{وط}{وع}$$

$$= ۲ع + ۲\frac{و^{۲}ع}{وط^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

لیکن $\frac{وع}{وع} = \frac{وع}{ور}\times\left(-\frac{۱}{ع^{۲}}\right)،\ \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{ر}\frac{وع}{ور} = -ع^{۳}\frac{وع}{وع}$

اب (۳) میں مندرج کرنے اور (۲) کو استعمال کرنے سے

$$\frac{۱}{ر} = ع^{۳}\left(ع + \frac{و^{۲}ع}{وط^{۲}}\right) \div \left\{ع^{۲} + \left(\frac{وع}{وط}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

$$= \left(ع + \frac{و^{۲}ع}{وط^{۲}}\right) \div \left\{۱ + \left(\frac{۱}{ع}\frac{وع}{وط}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۳}{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اوپر کے جملہ میں اگر جذر کو مثبت علامت دی جائے تو ر مثبت ہوگا اگر قوس مبدا کی جانب مقعر ہو اور منفی ہوگا اگر قوس مبدا کی طرف محدب ہو۔

(۳) **ذاتی مساوات**۔ فرض کرو کہ ایک منحنی کی قوس کا طول منحنی کے ایک ثابت نقطہ سے نقطہ ن تک س ہے اور ن پر کا مماس ایک ثابت مماس کے ساتھ زاویہ فما بناتا ہے۔ جو مساوات س اور فما کا باہمی ربط ظاہر کرتی ہے اسے منحنی کی ذاتی مساوات کہتے ہیں۔

یہ مساوات حوالہ کے ایسے خطوط پر منحصر نہیں ہے جو منحنی کے باہر واقع ہوں مثلاً کوئی قائم محور۔ اس بنا پر اسے منحنی کی ذاتی مساوات کہتے ہیں۔

جب منحنی کی ذاتی مساوات دی ہوئی ہو تو تفرق کرنے سے ر فوراً معلوم ہو سکتا ہے لیکن ابتدائی کام میں ذاتی مساوات چنداں اہمیت نہیں رکھتی، اسے بالعموم معمولی مساوات سے عمل تکمل کے ذریعہ حاصل کرنا پڑتا ہے۔ اس صورت میں کسی ثابت مماس کو محددوں کا ایک محور مانتے ہیں۔ اس صورت میں فما پر حادہ زاویہ ہونے کی قید نہیں ہونا چاہئے۔

مثال ۱ - لا^(۲/۳) + ما^(۲/۳) = ا^(۲/۳)

فرض کرو کہ لا = ا جم^۳ ت ، ما = ا جب^۳ ت ، ضابطہ (ب) استعمال کرو

لاَ = -۳ ا جم^۲ ت جب ت ، لاً = ۳ ا جم ت (۲ جب^۲ ت - جم^۲ ت)

ماَ = ۳ ا جب^۲ ت جم ت ، ماً = ۳ ا جب ت (۲ جم^۲ ت - جب^۲ ت)

لاَ^۲ + ماَ^۲ = ۹ ا^۲ جب^۲ ت جم^۲ ت ، لاَ ماً - ماَ لاً = -۹ ا^۲ جب^۲ ت جم^۲ ت

ر = -۳ ا جب ت جم ت = -۳ (ا لا ما)^(۱/۳)

اس صورت میں عف^۲ ما = ۱ / (۳ ا جب ت جم ت) اور ر اگر دفعہ ۲۳ کے دستور کے موافق لیا جائے تو یہ ۳ ا جب ت جم ت ہوگا۔

مثال ۲ - ر^م = ا^م جم م طہ

اس منحنی کی ع ، ر مساوات مرتب کرو اور ضابطہ (د) استعمال کرو۔

مس سا = ر فر طہ / فر ر = -مم م طہ = مس (م طہ + π/۲)

ہم لینگے سا = م طہ + π/۲ ، اس طرح

ع = ر جب سا = ر جم م طہ = ر^(م+۱) / ا^م

اس لئے ر = ر فر ر / فر ع = ا^م / ((م+۱) ر^(م-۱))

م کو مختلف قیمتیں دینے سے ہمیں کئی مشہور مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔
ملاحظہ ہو مشق ۱۰ سوال (۱۰)

مثال ۳ - قطع ناقص کے انحنا کا مرکز اور اس مرکز کا طریق معلوم کرو۔
ترقیم دفعہ ۳ مثال ۲ کے موافق یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ

$$\text{جب فہ} = -\frac{\text{ع لا}}{\text{ا}^2}\text{، جم فہ} = \frac{\text{ع ما}}{\text{ب}^2}\text{، ر} = -\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ع}^3}$$

$$\text{ضا} = \text{لا} - \text{ر جب فہ} = \text{لا}\left(1 - \frac{\text{ب}^2}{\text{ع}^2}\right)\text{، عا} = \text{ما}\left(1 - \frac{\text{ا}^2}{\text{ع}^2}\right)$$

اگر ن (لا، ما) کا خارج المرکز زاویہ طہ ہو تو یہ قیمتیں ہو جائینگی

$$\text{ا ضا} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\text{ جم}^3\text{ طہ، ب عا} = -(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\text{ جب}^3\text{ طہ}$$

مرکز انحنا کا طریق معلوم کرنے کے لئے طہ کو ساقط کرو

$$(\text{ا ضا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب عا})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$$

اب اگر رواں محدد لا، ما ہوں تو

$$(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$$

اس منحنی کی ترسیم کے لئے ملاحظہ ہو شکل ۳۰ دفعہ ۳۴ -

مثال ۴ - ثابت کرو کہ ایک منحنی کے کسی نقطہ ن پر کا عمودی اسراع $\frac{\text{و}^2}{\text{ر}}$ ہے جہاں و مماسی رفتار ہے اور $\frac{1}{\text{ر}}$ نقطہ ن پر منحنی کا انحنا ہے -

(شکل ۲۹) فرض کرو کہ ق پر مماسی رفتار و + مف و ہے، ن ح کی سمت میں ن اور ق پر کی رفتاروں کے اجزاء ترکیبی بالترتیب صفر اور (و + مف و) جب مف فہ ہیں، اس لئے ن پر کا عمادی اسراع ہے

$$\text{نہایا}_{\text{مف ت}\to} \frac{(\text{و} + \text{مف و})\text{ جب مف فہ}}{\text{مف ت}} = \text{و}\frac{\text{مف فہ}}{\text{مف ت}} = \text{و}\frac{\text{مف فہ}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}}$$

$$= \text{و} \times \frac{1}{\text{ر}} \times \text{و}$$

اور یہی ثابت کرنا مطلوب تھا -

مشق ۱۰

۱۔ کسی مخروطی کی مساوات اس شکل میں لکھی جا سکتی ہے ما^2 = ۲ ا لا + ب لا^2 جہاں محور یہ لا ماسکی محور ہے اور ۲ ا وتر خاص کا طول ہے۔ اگر ن پر کا عماد محور لا سے گ پر ملے اور ن گ اور ماسکی فاصلہ س ن کے درمیان زاویہ عما بنے تو ثابت کرو کہ

$$ر = \frac{ن گ^3}{ا^2} = \frac{ن گ}{جم^2 عما}$$

یہ قابل توجہ ہے کہ ن گ کا ظل س ن پر نیم وتر خاص کے مساوی ہے۔

۲۔ مثال ۱ میں جو ر کی قیمت عما کی رقوم میں معلوم کی گئی ہے اس سے کسی مخروطی تراش کے مرکز انحنا معلوم کرنے کا یہ عمل ثابت کرو۔ گ ح کو ن گ پر عمود وار کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ن س سے ح پر ملتا ہے۔ پھر ح ک کو ح ن پر عمود وار کھینچو اور اسے اتنا بڑھاؤ کہ ن گ سے یہ ک پر ملے۔ ک مرکز انحنا ہوگا۔

۳۔ قائم زائد کے لئے لا ما = ج^2، ثابت کرو کہ

$$ر = (لا^2 + ما^2)^{\frac{3}{2}} / ۲ ج^2$$

۴۔ قطع ناقص کا مرکز ج ہے اور اسکے محیط پر کے ایک نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ طما ہے۔ ج ق ناقص کا ایک نیم قطر ہے جو ن پر کے مماس کے متوازی ہے۔

ثابت کرو کہ عددی لحاظ سے)

$$ر = (ا^2 جب^2 طما + ب^2 جم^2 طما)^{\frac{3}{2}} / ا ب = \frac{ج ق^3}{ا ب}$$

یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ق کا خارج المرکز زاویہ طما $\pm \frac{\pi}{2}$ ہے۔ ج ن اور ج ق کو مزدوج نیم قطر کہتے ہیں کیونکہ ہم باسانی دیکھ سکتے ہیں کہ ان میں سے

کوئی سا قطر دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

۵۔ ناقص کے ایک نقطہ ن کا مرکزی نیم قطر ر ہے اور اگر مرکز سے ن پر کے مماس پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ا^2 + ب^2 - ر^2 = \frac{ا^2 ب^2}{ع^2}،\quad س = \frac{ا^2 ب^2}{ع^3}$$

زائد کے لئے ثابت کرو (متشابہ ترقیم کے موافق)

$$ر^2 - ا^2 + ب^2 = \frac{ا^2 ب^2}{ع^2}،\quad س = -\frac{ا^2 ب^2}{ع^3}$$

۶۔ منحنی $ا^2 ما = لا^3$ کے لئے ثابت کرو کہ $س = (ا^2 + ۹ لا^2)^{\frac{3}{2}} / ۶ ا^2 لا$ اور منحنی $ا ما^2 = لا^3$ کے لئے $س = لا^{\frac{1}{2}} (۴ ا + ۹ لا)^{\frac{3}{2}} / ۶ ا$

۷۔ ایک منحنی کی مساوات $ا ما = ب لا^2 + ۲ ج لا ما + گ ما^2 + ع_3 + ع_4 + \ldots + ع_ن$ ہے جہاں $ع_ن$، لا، ما میں ن ویں درجہ کا متجانس جملہ ہے ثابت کرو کہ مبدأ پر جو منحنی پر واقع ہے

$$عف ما = ۰،\quad عف^2 ما = \frac{۲ ب}{ا}،\quad س = \frac{ا}{۲ ب}$$

۸۔ مبدأ پر منحنی $ما = ۲ لا + ۳ لا^2 - ۲ لا ما + ما^2$ کی صورت میں ثابت کرو کہ نیم قطر انحنا $\frac{۵\sqrt{۵}}{۶}$ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ

$$ما = \frac{ا}{۲}\left(و^{\frac{لا}{ا}} + و^{-\frac{لا}{ا}}\right)$$

کے انحنا کا نصف قطر $\frac{ما^2}{ا}$ ہے اور یکساں مضبوطی کے زنجیرہ

طا = ج لوک قط (لا/ج) کے لئے س = ج قط (لا/ج)۔

۱۰۔ دفعہ ۳۳ مثال ۲ میں جو عام نتائج مرتب کئے گئے ہیں ذیل کی خاص صورتوں میں ان کی تصدیق کرو

(۱) اٹیرن کی شکل کا منحنی ر۲ = ا۲ جم ۲ طا ، ر۳ = ا۲ ع ، س = ا۲ / ۳ ر

(۲) قائم زائد ر۲ جم ۲ طا = ا۲ ، ع ر = ا۲ ، س = ر۳ / ا۲

(۳) مکافی ر(۱ + جم طا) = ۲ ا ، ا ر = ع۲ ، س = ۲ ر۳/۲ / ا۱/۲

(۴) خط صنوبری ر = ا (۱ + جم طا) ، ر۳ = ۲ ا ع۲ ، س = ۲ ا ع / ۳ ر

مکافی کے لئے م = - ۱/۲ ، صنوبری کے لئے م = ۱/۲ اور ۲ ا ، ا کی بجائے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ مبدا میں سے گذرنیوالا وتر انحنا ۲ ع فر ر / فر ع ہے،

منحنی ر۲ = ا۲ جم م طا کے لئے یہ وتر ۲ ر / ۱ + م ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی ر = ا ﮨ^(طا ہم عما) کی صورت میں نیم قطر انحنا رقم عما ہے، نیز نیم قطر انحنا کے سامنے مبدا پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۳۔ اگر ایک مخروطی تراش میں ماسکی نیم قطر اور ن پر کے مماس کے درمیان زاویہ سا ہو اور ماسکی نیم قطر اور عماد کا درمیانی زاویہ عما ہو تو ضابطہ (ع) کی مدد سے ثابت کرو کہ

س = ل / جب۳ سا = ل / جم۳ عما جہاں مخروطی کی مساوات ہے

ل ﮨ = ۱ + ز جم طا

اگر ر، رَ ماسکی فاصلے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ر\,رَ\,جم^2\,عما = جبا^2 = ل\,ل$$

$$اور\quad ر = \frac{(ر\,رَ)^{3/2}}{ب} = \frac{ر\,رَ}{ا\,جم\,عما}$$

۱۴- زبروں سے مراد تفرق بلحاظ س کے ہے۔ اگر مرکز انحنا کے محددہ (ضا، عا) ہوں تو مساواتوں جم فما = لاَ، جب فما = ماَ کو تفرق کرنے سے ثابت کرو

$$\frac{1}{ر} = -\frac{لاً}{ماَ} = \frac{ماً}{لاَ}\,،\quad \frac{1}{ر^2} = (لاً)^2 + (ماً)^2$$

$$اور\quad ضا = لا + ر^2\,لاً\,،\quad عا = ما + ر^2\,ماً$$

۱۵- ضابطہ (ع) سے ثابت کرو کہ نقطۂ انعطاف کے لئے شرط ہے

$$ع + \frac{د^2ع}{دطا^2} = ۰$$

۱۶- دائرہ $(لا - عما)^2 + (ما - بما)^2 = د^2$ اور منحنی $ما = ف(لا)$

ایک دوسرے کو نقطہ ن (ا، ب) پر قطع کرتے ہیں، اگر نقطہ ن پر عفا، اور عفاَ ما کی قیمتیں دائرہ اور منحنی دونوں کے لئے ایک ہی ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ نقطہ ن پر منحنی کا دائرہ انحنا ہے۔

نقطہ ن پر دائرہ اور منحنی دونوں کا مماس ایک ہی ہے کیونکہ ن دائرہ اور منحنی دونوں پر واقع ہے اور دائرہ کا ڈھال نقطہ ن پر مساوی ہے منحنی کے ڈھال کے اسی نقطہ پر۔ دائرہ کی مساوات کو دو مرتبہ تفرق کرو اور تفرق کے بعد
لا، ما، عفا ما، عفاَ ما کی بجائے بالترتیب ا، ب، ف(ا)، فَ(ا)، فً(ا) رکھو۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$(ا - عما)^2 + (ب - بما)^2 = د^2 \quad\ldots\ldots(۱)$$

$$(ا - عما) + (ب - بما)\,فَ(ا) = ۰ \quad\ldots\ldots(۲)$$

$$۱ + [فَ(ا)]^2 + (ب - بما)\,فً(ا) = ۰ \quad\ldots\ldots(۳)$$

(۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

ب - بہ = -[۱ + {فَ (ا)}²] ÷ فً (ا)

ا - عہ = فَ (ا) [۱ + {فَ (ا)}²] ÷ فً (ا)

یہ قیمتیں (۱) میں مندرج کرنے سے

د = [۱ + {فَ (ا)}²]^(۳/۲) ÷ فً (ا) .... (۴)

لیکن (۴) سے جو د کی قیمت حاصل ہوتی ہے وہ نقطہ ن پر نیم قطر انحنا ہے اور (عہ، بہ) نقطہ ن پر کے مرکز انحنا کے محدد ہیں۔

تعریف۔ دو منحنی ما = فا (لا) اور ما = ف (لا) جو ایکدوسرے کو نقطہ ن (ا، ب) پر قطع کریں وہ ن پر ایک دوسرے کے ساتھ نؔ ویں رتبہ کا تماس رکھتے ہیں اگر فاَ (ا) = فَ (ا)، فاً (ا) = فً (ا)، ......

فا^ن (ا) = ف^ن (ا) لیکن فا^(ن+۱) (ا) مساوی نہ ہو ف^(ن+۱) (ا) کے

اس لحاظ سے دائرہ انحنا اصلی منحنی کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔
ٹیلر کے مسئلہ (دفعہ ۴۳) سے معلوم ہوگا کہ جب دو منحنی ایک دوسرے کے ساتھ نقطہ (ا، ب) پر نؔ ویں رتبہ کا تماس رکھیں تو (ا، ب) کے نزدیک متناظر معینوں کا فرق فا (لا) - ف (لا)، (ن + ۱) ویں رتبہ کا صغاریہ ہوگا جبکہ لا - ا کو صدر صغاریہ خیال کیا جائے۔ کیونکہ

فا (لا) - ف (لا) = [(لا - ا)^(ن+۱) ÷ |ن + ۱] {فا^(ن+۱) (ا) - ف^(ن+۱) (ا) + ح}

جہاں ح صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ا

۴۴۔ برپیچہ درپیچہ / متوازی منحنی۔

تعریف۔ کسی منحنی کے مرکز انحنا کے طریق کو ہم اس منحنی کا برپیچہ کہینگے۔

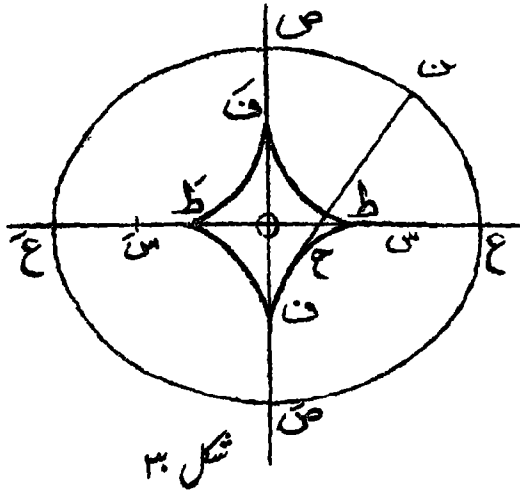
منحنی کے کسی نقطہ ن (لا، ما) کے جواب میں جو مرکز انحنا ح ہے اس کے محدد (ضا، عا) ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

ضا = لا - ر جب فما، عا = ما + ر جم فما .... (۱)

چاروں مقداریں لا، ما فما، ر ایک ہی مقدار لا یا س یا ت کی رقوم میں بیان ہوسکتی ہیں۔ اگر اس مقدار کو مساواتوں (۱) سے ساقط کیا جائے تو ضا، عا میں ربط ملیگا جو منحنی کے برپیچہ کی مساوات ہوگی۔

ناقص کے برپیچہ کی مساوات $(ا لا)^{\frac{2}{3}} + (ب ما)^{\frac{2}{3}} = (ا^2 - ب^2)^{\frac{2}{3}}$

پہلے معلوم کی گئی ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۳۳ مثال ۳) اور اس کی ترسیم شکل ۳۰ میں کھینچی گئی ہے۔

شکل ۳۰

ناقص کے راسوں ع، ع، ص، ص کے جواب میں انحنا کے مرکز ط، ط، ف، ف ہیں اور $ع ط = ع ط = \frac{ب^2}{ا}$، $ف ص = ص ف = \frac{ا^2}{ب}$

یہ واضح ہے کہ نصف قطر انحنا کو منحنی کے مرتسم کرنے میں کسطرح استعمال کر سکتے ہیں۔

ذیل میں برپیچہ کی مشہور خاصیتیں مندرج ہیں۔

(۱) مفروضہ منحنی کے نقطہ ن پر کا عماد برپیچہ کے نقطہ ح پر مماس ہے۔

(۲) برپیچہ کی کسی قوس کا طول اصلی منحنی میں انحنا کے ان نیم قطروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے جو قوس کے سروں کے متناظر نقطوں پر کھینچے جائیں۔

(۱) مساواتوں (۱) میں س کو جو مفروضہ منحنی کی قوس کا طول ہے متغیر متبوع مانو، تب

$$\frac{\text{د ضا}}{\text{د س}} = \frac{\text{د لا}}{\text{د س}} - \text{ر جم فا} \frac{\text{د فا}}{\text{د س}} - \text{جب فا} \frac{\text{د ر}}{\text{د س}}$$

$$= -\text{جب فا} \frac{\text{د ر}}{\text{د س}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

کیونکہ $\frac{\text{د لا}}{\text{د س}} = \text{جم فا}$، $\frac{۱}{\text{ر}} = \frac{\text{د فا}}{\text{د س}}$ ۔

اسی طرح سے $\frac{\text{د عا}}{\text{د س}} = \text{جم فا} \frac{\text{د ر}}{\text{د س}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$

اس لئے $\frac{\text{د عا}}{\text{د ضا}} = \frac{\frac{\text{د عا}}{\text{د س}}}{\frac{\text{د ضا}}{\text{د س}}} = -\text{مم فا}$

اب مرکز انحنا ح (ضا، عا)، ن پر کے عماد پر واقع ہے اور برپیچہ کا ڈھال نقطہ ح پر $\frac{\text{د عا}}{\text{د ضا}}$ یعنی - مم فا ہے - لیکن مفروضہ منحنی کے نقطہ ن جو عماد ہے اس کا ڈھال - مم فا ہے۔ اسلئے عماد ن ح برپیچہ کے مماس پر منطبق ہوتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ د فا برپیچہ کی قوس کا تفرقہ ہے، (۲) اور (۳) سے

$$\text{د ضا} = -\text{جب فا د ر}، \quad \text{د عا} = \text{جم فا د ر}$$

پس فرشہ = ± √(فرضا² + فرعا²) = ± فرس ....(۴)

یہ علامت مثبت ہوگی اگر س کے بڑھنے کے ساتھ شہ بڑھے اور منفی ہوگی اگر س کے بڑھنے کے ساتھ شہ گھٹے۔

مثبت علامت لینے سے

شہ = س + مستقل.....(۵)

شکل ۳۱ میں فرض کرو کہ شہ کو ح۱ سے ناپنا شروع کرتے ہیں اور

ن۱ح۱، ن۲ح۲، ن۳ح۳

شکل ۳۱

کے طول بالترتیب س۱، س۲، س۳ ہیں۔

(۵) کی رو سے

قوس ح۱ح۲ = س۲ + مستقل

= س۲ − س۱

قوس ح۱ح۳ = س۳ − س۱

جس سے مطلوبہ نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

اگر منحنی ح ح پر تاگا لپیٹ دیا جائے جس کا طول س۳ ہو اور اس کا ایک سرا ح۳ پر ثابت کر دیا جائے تو ظاہر ہے کہ جب تاگے کو منحنی پر سے خوب تان کر اتارا (اُکیلا) جائیگا تو اس کا آزاد سرا منحنی ن۱ن۲ن۳ کو مرتسم کرے گا۔ برپیچہ کی وجہ تسمیہ یہی ہے۔

منحنی ن۱ن۲ کو ح۱ح۲ کا درپیچہ کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ تاگے پر کا کوئی نقطہ

ایک درپیچہ مرتسم کریگا۔ پس کسی مفروضہ منحنی کا صرف ایک برپیچہ ہوتا ہے لیکن اسکے بیشمار درپیچے ہوتے ہیں۔

دو درپیچوں پ ن ، پ ن۱ ، پ ن۲ کو متوازی منحنی کہتے ہیں کیونکہ ان کا باہمی عمودی فاصلہ مستقل ہے۔

۳۵ ۔ لفاف

مساوات $\text{ما} = \text{عم}\,\text{لا} + \frac{۱}{\text{عم}}$ .... (۱)

جہاں عم اور ا مستقل ہیں ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اگر عم کو کوئی مختلف مستقل قیمت مثلاً عم۱ دی جائے تو مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ما} = \text{عم}_۱\,\text{لا} + \frac{۱}{\text{عم}_۱} \quad \text{.........(۲)}$$

اور یہ ایک مختلف خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

(۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع کے محدد ہیں

$$\text{لا} = \frac{۱}{\text{عم}\,\text{عم}_۱} \text{،} \quad \text{ما} = \frac{۱}{\text{عم}} + \frac{۱}{\text{عم}_۱} \quad \text{.........(۳)}$$

اب فرض کرو کہ عم۱ بلحاظ قیمت عم کے قریب آتا جاتا ہے، اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ خط (۲) خط (۱) کے قریب آتا جائیگا، لیکن مساواتوں (۳) سے ظاہر ہے کہ جب، عم۱ انتہا میں مائل بہ عم ہو تو نقطہ تقاطع انتہائی صورت میں ایک محدود مقام کی طرف مائل ہوتا ہے جس کے محدد

$$\text{لا} = \frac{۱}{\text{عم}^۲} \text{،} \quad \text{ما} = \frac{۲}{\text{عم}} \quad \text{.........(۴)}$$

ہیں۔ اگر ہم مساواتوں (۴) سے عم کو ساقط کر دیں تو مساوات

$$\text{ما}^۲ = ۴\,\text{ا}\,\text{لا} \quad \text{.........(۵)}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ عم خواہ کوئی قیمت اختیار کرے، انتہائی نقطہ تقاطع مکانی (۵) پر واقع ہوتا ہے نیز اسکی بآسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ عم کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو خط (۱) مکانی کا مماس ہے۔

بالعموم کسی منحنی کی مساوات ف (لا، ما) = ۰ میں ایسے مستقل شامل ہوتے ہیں جو منحنی کی شکل، ناپ اور مقام کا تعین کرتے ہیں، ان مستقلوں کو سلسلہ وار مختلف قیمتیں دینے سے مختلف منحنیات کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے لیکن اس جگہ ہم صرف اس صورت پر غور کرینگے جس میں صرف ایک مستقل کو مختلف قیمتیں دینے سے منحنیات کا سلسلہ حاصل ہو۔ اس سلسلہ کو ہم قبیل منحنیات کہینگے۔ ایسی صورت میں مستقل کو قبیل کا متبدل کہتے ہیں، مثلاً (۱) میں عہ خطوط مستقیم کے قبیل کا متبدل ہے۔

کسی قبیل کے کوئی دو منحنی بالعموم ایکدوسرے کو قطع کرینگے، اگر قبیل کے دو منحنیات م اور م۲ کے لئے متبدل کی قیمتیں عہ اور عہ + مف عہ ہوں تو انکا نقطہ یا نقاط تقاطع محدود انتہائی مقام اختیار کرینگے جبکہ مف عہ مائل بہ صفر ہو۔ ان انتہائی مقامات کے طریق کو قبیل منحنیات کا لفاف کہتے ہیں۔

مثلاً مکافی (۵)، قبیل (۱) کا لفاف ہے، کسی منحنی کا برپیچ ایسے خطوط مستقیم کے قبیل کا لفاف ہے جو منحنی کے عماد ہوں۔ (دفعات ۳۲، ۳۴)

۳۶ – لفاف کی مساوات۔

فرض کرو کہ مساوات

ف (لا، ما، عہ) = ۰ .... (۱)

ایک قبیل منحنیات کو تعبیر کرتی ہے اور قبیل کا متبدل تفاعلی علامت میں جداگانہ دکھایا گیا ہے، نظام کے کسی ایک منحنی کے لئے عہ مستقل ہے

فرض کرو کہ مساوات

ف (لا، ما، عہ + مف عہ) = ۰ .... (۲)

نظام کے ایک اور منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ (۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع کے محدد

ف (لا، ما، عہ + مف عہ) - ف (لا، ما، عہ) = ۰

یعنی { ف (لا، ما، عہ + مف عہ) - ف (لا، ما، عہ) } / مف عہ = ۰ .... (۳)

کو پورا کرینگے۔

(۳) کی انتہا مف عہ ← ۰ کے لئے

$$\frac{\text{جف ف (لا، ما، عا)}}{\text{جف عا}} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

ہے، اسلئے لفاف پر کے نقاط کے محدد مساواتوں (۱) اور (۴) کو پورا کرتے ہیں اور لفاف کی مساوات ان دو مساواتوں سے عا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اوپر کے ثبوت سے ظاہر ہے کہ (۴) کے مرتب کرنے میں لا اور ما دونوں کو مستقل قرار دیا گیا ہے۔

مثلاً اگر $\text{ف (لا، ما، عا)} = -\text{ما} + \text{عا لا} + \frac{۱}{\text{عا}}$

$$\frac{\text{جف ف (لا، ما، عا)}}{\text{جف عا}} = \text{لا} - \frac{۱}{\text{عا}^۲}$$

مساواتوں $-\text{ما} + \text{عا لا} + \frac{۱}{\text{عا}} = ۰$ اور $\text{لا} - \frac{۱}{\text{عا}^۲} = ۰$

سے عا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے $\text{ما}^۲ = ۴\,\text{لا}$ پس لفاف مکافی ہے جیسا کہ دفعہ ۳۵ میں حاصل کیا گیا۔

دفعہ ۳۵ میں ہم نے دیکھا کہ قبیل (۱) کا ہر ایک رکن مکافی (۵) کا مماس ہے۔ اب ہم ذیل کا مسئلہ ثابت کرینگے۔

مسئلہ۔ بالعموم کسی قبیل منحنیات کا لفاف قبیل کے ہر ایک رکن کو مس کرتا ہے۔

(۱) کے نقطہ (لا، ما) پر ڈھال ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

جہاں عمل تفرق میں عا کو مستقل رکھنا چاہئے

بخلاف اس کے لفاف کی مساوات حاصل کرنے میں عا کو (۱) اور (۴) میں سے ساقط کیا جاتا ہے۔ اس لئے (۱) کو لفاف کی مساوات مانا جاسکتا ہے بشرطیکہ عا کو لا، ما کا ایک ایسا تفاعل قرار دیا جائے جس کا تعین (۴) سے ہوتا ہے۔ پس لفاف کے کسی نقطہ

(لا، ما) پر کا ڈھال (۱) کا پورا مشتق لینے سے حاصل ہوگا پورا مشتق ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف عا}} \cdot \frac{\text{د عا}}{\text{د لا}} = 0 \quad \ldots\ldots (6)$$

اب فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) کے محددہ (۱) اور (۴) دونوں کو پورا کرتے ہیں، اس طرح یہ نقطہ منحنی (۱) اور لفاف دونوں پر واقع ہوگا۔ نیز (۴) کی رو سے مساوات (۶) مساوات (۵) میں تحویل ہو جاتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نقطہ (لا، ما) پر ڈھال $\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}}$ منحنی (۱) اور لفاف دونوں کے لئے وہی ہے۔ مسئلہ ثابت ہوا۔

یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$، $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ دونوں صفر نہیں ہیں۔

اگر یہ صفر ہوں تو $\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}}$ کی قیمت جو (۵) یا (۶) سے حاصل ہوتی ہے غیر معین ہوگی، اس صورت میں ممکن ہے کہ مسئلہ درست نہ ہو مگر ایسی صورتوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

تحلیلی نقطہ نظر سے قبیل (۱) کے لفاف معلوم کرنے کا عمل وہی ہے جو متغیر عا کے تفاعل ف (لا، ما، عا) کے موثر کی قیمتیں معلوم کرنے کا عمل ہے جبکہ لا، ما کو مستقل مانا جائے۔

طالب علم عا کی مثبت اور منفی قیمتوں کے لئے قبیل $\text{ما} = \text{عا لا} + \frac{1}{\text{عا}}$ کے چند خطوط کھینچے، اس طرح اسے ایک ایسے منحنی کا اچھا اندازہ ہو جائیگا جو اپنے مماسوں کا لفاف ہے۔ یہ خط بآسانی کھینچ سکینگے کیونکہ ان کے مقطوعے محاوروں پر بالترتیب

$$-\frac{1}{\text{عا}^2}، \frac{1}{\text{عا}} \text{ ہیں۔}$$

مثال ۱۔ مکانی $\text{ما}^2 = 4\,\text{لا}$ کا پیچہ مکانی کے عمادوں کا لفاف خیال کیا جا سکتا ہے۔

شکل ۳۲

جہاں ے س ص نقطہ ے میں سے گذرنیوالا قطر ہے، (۱) خط تدویر کی مساواتیں ہیں۔

اگر طا = π تو لا = π ا = و ب اور ن اسوقت نقطہ ا پر ہوتا ہے اور اس حالت میں اس کا فاصلہ قاعدہ سے زیادہ سے زیادہ ہے، ا کو رأس کہتے ہیں۔

جسوقت طا = ۲π تو لا = ۲π ا = و د، اس وقت ن د پر ہوتا ہے۔

محراب و ا د، ب ا کے گرد متشاکل ہے، ب ا کو محور کہتے ہیں۔ اگر دائرہ اور لڑھکتا رہے تو ن سلسلہ وار کئی محراب مرتسم کریگا جو و ا د کے متماثل ہونگے۔ جب خط تدویر کا ذکر کیا جائے تو بالعموم اسکے ایک محراب سے مراد ہوتی ہے۔ ا اس صورت میں رأس ہے اور ب ا محور۔

خاصیتیں ذیل کے خواص بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

(۱) س فا = عف لا ما = جم طا/۲ = س (π/۲ − طا/۲) = س ن ے ص

اسلئے فا = π/۲ − طا/۲ = ∠ ن ے ص

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ت ص مماس ہے اور ن سے نقطہ ن پر کا عماد ہے۔

(۲) س = قوس و ن = ۴ ا (۱ - جم طہ/۲)، قوس و ا = ۴ ا

(۳) ر = ن ح = ۴ ا جب طہ/۲ = ۲ ا ن سے (تعداداً)

[اگر مماس ا ت اور عماد ا ب کو محور مانا جائے اور ن سے م ا ت پر عمود کھینچا جائے تو رکھو طہَ = ص س ن = π - طہ۔

اس صورت میں

لا = ا م = ا (طہَ + جب طہَ)، ما = م ن = ا (۱ - جم طہَ) ....(اَ)

(۱ا) فا = د ن ص م = ½ طہَ = د ن سے ص

(۲ا) س = قوس ا ن = ۴ ا جب طہَ/۲، س² = ۸ ا × م ن = ۸ ا ما]

مرکز انحنا ح کے محدد ہیں

ضا = و ل + ۴ ا جب طہ/۲ جم طہ/۲ = ا (طہ + جب طہ)

عا = - ح جب طہ/۲ = - ا (۱ - جم طہ)

مساواتوں (اَ) کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ خط تدویر و ا د کا برپیچہ ایک مساوی تدویر ہے جو دو نصفوں و ح ب، ب ک پر مشتمل ہے۔ (اَ) میں محور ما کی مثبت سمت نیچے کی طرف ہے اور جب و مبدأ ہو تو مثبت سمت اوپر کیطرف ہے، پس اس لئے عا منفی ہے۔

ب برپیچہ پر ایک قرن ہے، و اور د اصلی تدویر کے قرن اور برپیچہ کے راس ہیں۔

برتدویر اور درتدویر جب ایک دائرہ ایک ثابت دائرہ کے محیط پر لڑھکتا ہو (بغیر پھسلنے کے) تو اول الذکر کے محیط پر کا کوئی نقطہ جو منحنی مرتسم کرتا ہے اسے ہم برتدویر کہینگے اگر متحرک دائرہ ثابت دائرہ کے باہر ہو اور درتدویر کہینگے اگر یہ دائرہ اندر ہو۔

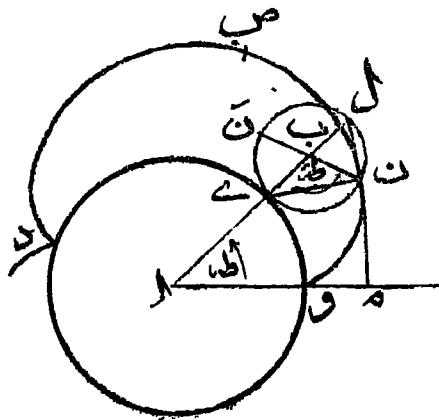
جب لڑھکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کے گرد پورا حائط ہو تو برتدویر کو حول تدویر کہا جاسکتا ہے۔

شکل ۳۳ میں برتدویر کی تکوین دکھائی گئی ہے، نقطہ ن مرسم نقطہ ہے اور و نقطہ ابتدائی ہے۔ فرض کرو کہ ثابت اور لڑھکنے والے دائروں کے نصف قطر بالترتیب ا، ب ہیں، زاویہ و ا ے = ط اور زاویہ ے ب ن = طَ، ا م = لا، م ن = ما، تب

قوس ن ے = قوس و ے یعنی ب طَ = ا ط

لا = (ا + ب) جم ط - ب جم (ط + طَ)

$$= (ا + ب)\text{ جم ط} - ب\text{ جم }\frac{ا + ب}{ب}\text{ ط}$$

$$ما = (ا + ب)\text{ جب ط} - ب\text{ جب }\frac{ا + ب}{ب}\text{ ط} \quad \ldots\ldots (۲)$$

شکل ۳۳

جب دائرے سے پرے کے مماس کے ایک ہی جانب واقع ہوں یعنی درتدویر کے لئے (ب < ا) اور حول تدویر کے لئے (ب > ا) صرف ب کی علامت بدل دینا کافی ہوگا، درتدویر کی مساواتیں اس شکل کی ہونگی

لا = (ا - ب) جم طہ + ب جم $\frac{(ا - ب) طہ}{ب}$

ما = (ا - ب) جب طہ - ب جب $\frac{(ا - ب) طہ}{ب}$ ......(۳)

اگر نسبت ب : ا کوئی متوافق عدد ہو تو دائرہ ب کا مرسم نقطہ ن پھر ابتدائی نقطہ ق پر واپس آئیگا جبکہ متحرک دائرہ ب ثابت دائرہ کے گرد ایک یا زیادہ دفعہ پورا لڑھک جائے۔ اگر نسبت ب : ا متباین ہو تو ن پھر ق پر واپس نہیں آئے گا۔

استداری خط یا استداری۔ اگر مرسم نقطہ ن محیط پر واقع نہ ہو بلکہ ایک نصف قطر پر یا نصف قطر مخروجہ پر واقع ہو تو مرتسمہ منحنی کو ہم استنداری یا بر استنداری یا در استداری کہینگے۔

طالب علم بآسانی دیکھہ لیگا کہ اگر دائرہ کے مرکز سے ن کے فاصلہ کو نصف قطر کے ساتھ نسبت لہ : ۱ ہو تو مساواتوں (۱) میں جب طہ اور جم طہ کو لہ کے ساتھ ضرب دینے سے استداری کی مساواتیں حاصل ہونگی اور مساواتوں (۲) اور (۳) میں دوسری رقم کے سرجب کو لہ کے ساتھ ضرب دینے سے بالترتیب دراستداری اور براستداری خطوط کی مساواتیں حاصل ہونگی۔

مشق ۱۱

۱- ثابت کرو کہ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کی صورت میں

ر = -۲ ا قم^2 فہ، ضا = ۲ ا + ۳ ا قم^2 فہ، عا = - ۲ ا قم^3 فہ

پھر پیچہ کی مساوات حاصل کرو۔

۲- زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کی صورت میں ثابت کرو کہ

ا^4 ضا = (ا^2 + ب^2) لا^3، ب^4 عا = - (ا^2 + ب^2) ما^3

اور بریچہ کی مساوات ہے

$$(\text{ا لا})^{\frac{2}{3}} - (\text{ب ما})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$$

۳- ثابت کرو کہ قائم زائد $\text{لا ما} = \text{ج}^2$ کے لئے

$$\text{خا} = \frac{3}{2}\,\text{لا} + \frac{\text{ما}^3}{2\,\text{ج}^2}،\quad \text{عا} = \frac{3}{2}\,\text{ما} + \frac{\text{لا}^3}{2\,\text{ج}^2}$$

اور بریچہ کی مساوات ہے

$$(\text{لا} + \text{ما})^{\frac{2}{3}} - (\text{لا} - \text{ما})^{\frac{2}{3}} = (4\,\text{ج})^{\frac{2}{3}}$$

۴- ثابت کرو کہ منحنی $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ا}^{\frac{2}{3}}$ کے لئے (ملاحظہ ہو دفعہ ۳۴، مشق ۱)

$$\text{خا} = \text{ا جم}^3\text{ت} + 3\,\text{ا جم ت جب}^2\text{ت}،\quad \text{عا} = \text{ا جب}^3\text{ت} + 3\,\text{ا جب ت جم}^2\text{ت}$$

اور بریچہ کی مساوات ہے

$$(\text{لا} + \text{ما})^{\frac{2}{3}} + (\text{لا} - \text{ما})^{\frac{2}{3}} = 2\,\text{ا}^{\frac{2}{3}}$$

۵- ثابت کرو کہ خطوط مستقیم $\frac{\text{لا}}{\text{عا}} + \frac{\text{ما}}{\text{بہا}} = 1$ کے قبیل کا لفاف

(۱) جبکہ $\text{عا بہا} = \text{ا}^2$ زائد $4\,\text{لا ما} = \text{ا}^2$ ہے

(۲) جبکہ $\text{عا} + \text{بہا} = \text{ا}$ مکافی $\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}} = \sqrt{\text{ا}}$ ہے

(۳) جبکہ $\text{عا}^2 + \text{بہا}^2 = \text{ا}^2$ منحنی $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{ا}^{\frac{2}{3}}$ ہے

متبدل عا، بہا جن شرائط کے تابع ہیں ان کا ہندسی مفہوم بیان کرو۔

۶- ثابت کرو کہ ناقصوں $\frac{\text{لا}^2}{\text{عا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{بہا}^2} = 1$ کے قبیل کا لفاف

(۱) جبکہ $\text{عا بہا} = \text{ا}^2$ دو زائد $2\,\text{لا ما} = \pm\,\text{ا}^2$ ہے

(۲) جبکہ عہ + بہ = ا منحنی $لا^{\frac{2}{3}} + ما^{\frac{2}{3}} = ا^{\frac{2}{3}}$ ہے

متبدل عہ، بہ جن شرائط کے تابع ہیں ان کا ہندسی مفہوم بیان کرو۔

۷۔ ثابت کرو کہ مکافی کے دوہرے نعینوں کو قطر مان کر جو دائرے کھینچ سکتے ہیں ان کا لفاف ایک مساوی مکافی ہے۔

۸۔ اگر ث، ک، س ایک نقطے کے محددوں کے تفاعل ہوں اور عہ متبدل ہو تو ن عہ^2 + ۲ ق عہ + س = ۰ کا لفاف $ق^2 - ن س = ۰$ ہے۔ اور ن جم عہ + ق جیب عہ = س کا لفاف $ن^2 + ق^2 = س^2$ ہے۔

۹۔ م کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو ثابت کرو کہ خط مستقیم

$$ما = م لا + \sqrt{\{(ا + ب م^2)/ ا ب\}}$$

مخروطی $ا لا^2 + ب م^2 = ۱$ کو مس کرتا ہے۔

۱۰۔ ایک متحرک خط مستقیم ہے، دو ثابت نقطوں (ج، ۰) اور (-ج، ۰) سے اس پر جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کے مربعوں کا (۱) حاصل ضرب (۲) مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر صورت میں لفاف ایک مرکز دار مخروطی تراش ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ناقص کے مرکزی نصف قطروں کو قطر مان کر جو دائرے بنائے جا سکتے ہیں ان کا لفاف $(لا^2 + ما^2)^2 = ا^2 لا^2 + ب^2 ما^2$ ہے۔

۱۲۔ ناقصوں $\frac{(لا - عہ)^2}{ا^2} + \frac{(ما - بہ)^2}{ب^2} = ۱$ کا لفاف جبکہ عہ، بہ مساوات $\frac{عہ^2}{ا^2} + \frac{بہ^2}{ب} = ۱$ کے ذریعہ مربوط ہوں ناقص $\frac{لا^2}{۲ا^2} + \frac{ما^2}{۲ب^2} = ۱$ ہے۔ ہندسی زبان میں اس مسئلہ کو بیان کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے قبیل

ر لا قط عما ـ ب ما قم عما = ا^2 ـ ب^2

کا لفاف منحنی (ا لا)$^{\frac{2}{3}}$ + (ب ما)$^{\frac{2}{3}}$ = (ا^2 ـ ب^2)$^{\frac{2}{3}}$ ہے۔

۱۴ـ اگر شکل ۲۹ میں ق ے = ع تو ثابت کرو کہ ن پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں یہ ہیں

لا جب فما ـ ما جم فما = ع .... (۱)

لا جم فما + ما جب فما = $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر فما}}$ .... (۲)

اور (۲) سے ثابت کرو کہ ے ن = $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر فما}}$

منحنی کو اس کے مماسوں کا لفاف تصور کرو۔

۱۵ـ مثال ۱۴ میں جو ترقیم استعمال کی گئی ہے اس کے موافق ثابت کرو کہ مرکز انحنا کے محدد (ضا، عا) ذیل کی مساواتوں سے معلوم ہوتے ہیں

ضا جم فما + عا جب فما = $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر فما}}$، ـ ضا جب فما + عا جم فما = $\frac{\text{فر}^2\text{ ع}}{\text{فر فما}^2}$

یا ضا = $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر فما}}$ جم فما ـ $\frac{\text{فر}^2\text{ ع}}{\text{فر فما}^2}$ جب فما، عا = $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر فما}}$ جب فما + $\frac{\text{فر}^2\text{ ع}}{\text{فر فما}^2}$ جم فما

۱۶ـ اوپر کی دو مثالوں کی ترقیم کے موافق ثابت کرو کہ ق ح کا ظل ن ح پر جہاں ح مرکز انحنا ہے

ـ ضا جب فما + عا جم فما

ہے اور ر = ع ـ ضا جب فما + عا جم فما = ع + $\frac{\text{فر}^2\text{ ع}}{\text{فر فما}^2}$

۱۷ـ ثابت کرو کہ کسی منحنی کے پر پیچ کا نصف قطر انحنا ر $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ ہے، جہاں ر اصلی منحنی کے متناظر نقطہ پر نصف قطر انحنا ہے۔

دفعہ ۳۴، (۲) کو استعمال کرو۔ منحنی اور بر پیچہ کے لئے فر فہ وہی ہے۔

۱۸۔ ایک منحنی، اس کے بر پیچہ اور اس کے انحنا کے دو نصف قطروں کے درمیان جو رقبہ گھر جاتا ہے وہ ۱ ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^2 \text{۱}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{2} \sqrt{\text{۱}} \frac{\text{فر فہ}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \right)^2 \right\}^2 \div \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$$

۱۹۔ اب ج ایک دائرہ کی قوس ہے جس کا مرکز ق ہے اور نصف قطر ۱، ج ن نقطہ ج پر مماس ہے اور ا ن دائرہ کے در پیچہ کا ایک حصہ ہے، ق ا کو محور لا اور فہ کو زاویہ ا ق ج مان کر ثابت کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں

لا = ا جم فہ + ا فہ جب فہ، ما = ا جب فہ - ا فہ جم فہ

اور در پیچہ کی ذاتی مساوات ہے $\text{س} = \frac{1}{2}$ ا فہ^2

دائرہ کے سب در پیچے مطابقاً مساوی ہیں اس لئے حوالہ کے وقت صرف دائرہ کا "در پیچہ" کہا جا سکتا ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے در پیچہ کی ع، ر مساوات ہے

$$\text{ر}^2 = \text{ع}^2 + \text{ا}^2$$

۲۱۔ ناقص کے بر پیچہ کا کل طول ہے

$$4\,(\text{ا}^3 - \text{ب}^3) / \text{ا ب}$$

۲۲۔ ثابت کرو کہ خط تدویر کی ذاتی مساوات جبکہ راس ا مبدا ہو جہاں سے س ناپا جائیگا اور ا ن ثابت مماس ہو س = ۴ ا جب فہ ہے [شکل ۳۲]

۲۳۔ ثابت کرو کہ شکل (۳۳) میں ل ن م نقطہ ن پر کا مماس ہے اور ن ل سے عماد۔

کیونکہ مس فہ = $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جم طہ - جم (طہ + طہَ)}}{\text{جب (طہ + طہَ) - جب طہ}} =$ مس $(\text{طہ} + \frac{\text{طہَ}}{2})$

اور ن ل محور لا کے ساتھ زاویہ طہ + $\frac{1}{2}$ طہَ بناتا ہے۔

اسی طرح کے نتائج در تدویر کے لئے بھی درست ہیں۔

۲۴ ـ شکل ۳۴۳ میں اگر برتدویر کی قوس ق ط = س تو ثابت کرو کہ

$\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = ۲(ا+ب)\text{جب}\frac{\text{ا طہ}}{۲\text{ب}}$ ، $س = \frac{۴\text{ب}(ا+ب)}{ا}(۱-\text{جم}\frac{\text{ا طہ}}{۲\text{ب}})$

اور ق ط ک کا طول ہے $\frac{۸\text{ب}(ا+ب)}{ا}$ ہے ۔

۲۵ ـ ثابت کرو کہ برتدویر کی ذاتی مساوات ہے $س = \frac{۴\text{ب}(ا+ب)}{ا}\{۱-\text{جم}\frac{\text{ا فہ}}{ا+۲\text{ب}}\}$

اور نصف قطر انحنا ہے $ر = \frac{۴\text{ب}(ا+ب)}{ا+۲\text{ب}}\text{جب}(\frac{\text{ا فہ}}{ا+۲\text{ب}})$

اسی طرح کے نتائج درتدویر کے لئے بھی درست ہیں اگر ب کی علامت بدل دی جائے ۔

۲۶ ـ اگر ب = $\frac{ا}{۴}$ تو ثابت کرو کہ اس درتدویر کے چار قرن ہیں اور اس کی مساواتیں ہیں $لا = ا\,\text{جم}^۳\text{طہ}$ ، $ما = ا\,\text{جب}^۳\text{طہ}$

طہ کو ساقط کرنے سے $لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = ا^{\frac{۲}{۳}}$ حاصل ہوتا ہے ۔

۲۷ ـ اگر ب = $\frac{ا}{۲}$ تو ثابت کرو کہ خط درتدویر ثابت دائرہ کا قطر بن جاتا ہے

۲۸ ـ اگر ب = ا اور مبدأ نقطہ ق پر ہو تو ثابت کرو کہ برتدویر خط صنوبری

$ر = ۲ا(۱-\text{جم طہ})$ بن جاتا ہے ۔ یعنی

$ر\,\text{جم طہ} = لا - ا$ ، $ر\,\text{جب طہ} = ما$

۲۹ ـ مثال ۲۵ میں رکھو

$فہ = \frac{(ا+۲\text{ب})}{۲ا}\pi + فہَ$ ، $س = \frac{۴\text{ب}(ا+ب)}{ا} + سَ$

یعنی قوس کو ق ن ک کے نقطہ وسطی ص (راس) سے ناپنا شروع کرو ۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$س^{\prime} = \frac{۴ب(ا+ب)}{ا} جب \frac{ا\ فہ}{ا+۲ب}$$

ثابت کرو کہ مساوات $س^ن = ل\ جب\ ن\ فہ$ ایک برتدویر کو تعبیر کرے گی اگر ن ایک سے کم ہو اور درتدویر کو اگر ن ایک سے بڑا ہو۔

۳۰۔ اگر ایک منحنی اور اس کے برپیچہ کی متناظر قوسیں س اور ثہ ہوں تو

$$ثہ = \pm \frac{فرس}{فرفہ} + مستقل$$

مثال ۲۹ کے نتیجہ سے ثابت کرو کہ برتدویر کا برپیچہ ایک برتدویر ہے اور درتدویر کا درتدویر ہے۔

۳۱۔ ایک دائرہ کے محیط پر متوازی شعاعیں پڑتی ہیں اور منعکس ہوتی ہیں اور زاویہ انعکاس زاویہ وقوع کے مساوی ہے۔ دائرہ کا نیم قطر ا ہے اور نقطہ وقوع (ا جم طہ، ا جب طہ) ہے محدودوں کا مبدأ دائرہ کا مرکز ہے اور محور لا سمت وقوع کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ شعاع منعکسہ کی مساوات ہے

$$ما\ جم\ ۲طہ - لا\ جب\ ۲طہ + ا\ جب\ طہ = ۰$$

اور شعاع منعکسہ کا لفاف ذیل کی برتدویر ہے

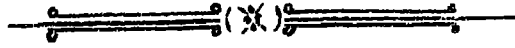
$$لا = \frac{ا}{۴}(۳\ جم\ طہ - جم\ ۳طہ)،\ ما = \frac{ا}{۴}(۳\ جب\ طہ - جب\ ۳طہ)$$

۳۲۔ اگر ایک ذرہ مرکزی مدار ایک ایسی قوت ق کے ماتحت مرتسم کرے جو سمتی نیم قطر کی سمت میں باہر کی طرف عمل کرتی ہو تو مستعملہ ترقیم کے مطابق

$$ق = \frac{ھ^۲}{ع^۲} \text{ جہاں } و \text{ رفتار ہے اور } ع \text{ عمود کا طول۔}$$

ثابت کرو کہ

$$ق = \frac{فر}{فرر}\left(\frac{۱}{۲}و^۲\right) = -ھ^۲ع^۲\left(\frac{فر^۲ع}{فرطہ^۲} + ع\right) \text{ جہاں } ع = \frac{۱}{ر}$$

یہ مساوات مدار کی تفرقی مساوات ہے۔ اگر ق = ± ص ع تو ثابت کرو کہ مدار ایک مخروطی ہے جہاں قوت کا مرکز اس کے ایک ماسکہ پر ہے۔
(ملاحظہ ہوں دفعات ۶۰، ۶۱)

لامتناہی سلسلے

۳۸ - **لامتناہی سلسلے** ۔ لامتناہی سلسلوں کی مکمل بحث کے لیے طالبعلم کرسٹل کے جبرو مقابلہ حصۂ دوم کے متعلقہ ابواب کا مطالعہ کرے، انکے متعلق نہایت عمدہ ابتدائی بیان اوسگڈ کی کتاب "لامتناہی سلسلوں کی تمہید" (انٹروڈکشن ٹو انفنٹ سیریز، کمبرج، صوبجات متحدہ امریکہ، ہارورڈ یونیورسٹی) میں ملیگا ۔ یہاں ہم اپنی توجہ صرف ان مسائل تک محدود رکھینگے جن کو آئندہ اکثر استعمال کرنے کی ضرورت ہوگی ۔

لامتناہی سلسلہ کی تعریف ۔ فرض کرو کہ $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$، ..... مقادیر کی ایک جمعیت ہے جو تعداد میں لاانتہا ہے، اور $ع_ن$ عدد ن کا ایک وحید القیمت تفاعل ہے ۔ نیز فرض کرو کہ $س_ن$ پہلی ن رقموں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے، تب

$$س_ن = ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots + ع_ن \dots \qquad (۱)$$

اگر ن کو لاانتہا بڑھایا جائے تو سلسلہ (۱) لامتناہی سلسلہ ہو جائیگا ۔

اگر ن کے لاانتہا بڑھنے سے مجموعہ $س_ن$ ایک معین محدود انتہا س کی طرف مائل ہو تو لامتناہی سلسلہ کو مستدق کہتے ہیں اور اس امر کو کئی طرح سے بیان کرتے ہیں، سلسلہ کا مجموعہ س ہے، سلسلہ کی قیمت س ہے، سلسلہ قیمت س کی طرف مستدق ہوتا ہے ۔

مثال ۱ - فرض کرو کہ

$$س_ن = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$$

یہاں $س_ن = ۲ - \frac{1}{۲^{ن-1}}$، نہا $س_ن = ۲ = س$

اگر ن کے لاانتہا بڑھنے سے $س_ن$ کسی معین محدود انتہا کی طرف مائل نہ ہو تو سلسلہ کو غیر مستدق کہتے ہیں۔ اس صورت میں یا تو $س_ن$ تعداداً لاانتہا بڑھے گا اور سلسلہ متسع کہلائے گا یا $س_ن$ کی کوئی معین انتہا نہیں ہوگی اور اس حالت میں سلسلہ کو اہتزازی سلسلہ کہینگے۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ $س_ن = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن$

یہاں $س_ن$ لاانتہا بڑھتا ہے، اس لئے سلسلہ متسع ہے۔

مثال ۳۔ فرض کرو کہ $س_ن = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots (-1)^{ن-1} \times ۱$

اگر ن جفت ہو تو $س_ن$ صفر ہوتا ہے اور اگر طاق ہو تو ایک۔ اگرچہ اس صورت میں $س_ن$ لامتناہی نہیں ہوتا تاہم اس کی انتہا ایک معین محدود مقدار نہیں ہے، اس لئے سلسلہ اہتزاز کرتا ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر $ع_1، ع_2، \dots$ سب متحد العلامت ہوں تو سلسلہ اہتزاز نہیں کر سکتا۔

ترقیم لامتناہی سلسلہ کو ہم اس طرح تعبیر کرینگے

$$ع_1 + ع_2 + \dots \quad \text{، یا} \quad \sum ع \quad \text{یا} \quad \sum_1^{\infty} ع_ن$$

ذیل کے مسائل بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

مسئلہ ۱۔ اگر $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots$ قیمت س کی طرف استدقاق کرے تو سلسلہ $ج ع_1 + ج ع_2 + ج ع_3 + \dots$، ج س کی طرف استدقاق کریگا جبکہ ج کوئی محدود مقدار ہے۔

اس کا ثبوت آسان ہے اور طالب علم کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر $ع_1 + ع_2 + \dots$ مائل بہ س ہو اور $ف_1 + ف_2 + \dots$ مائل بہ ت تو سلسلہ $(ع_1 + ف_1) + (ع_2 + ف_2) + \dots$ مائل بہ $(س + ت)$ ہوگا

ب - ج < ا < ب + ج، ا - ج < ب < ا + ج

۲۹- انتہا کا وجود کسی تفاعل کا تعین ایک لا متناہی سلسلہ سے ہو سکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ مستدق ہو، تمثیلاً لا متناہی سلسلہ

$$\text{ا} + \text{ا لا} + \text{ا لا}^{۲} + \ldots\ldots$$

قیمت $\frac{\text{ا}}{\text{۱ - لا}}$ کی طرف مستدق ہوتا ہے جب تک کہ لا تعداداً ایک سے کم رہے۔ اس صورت میں ہم کہ سکتے ہیں کہ اگر -۱ < لا < ۱ تو تفاعل $\frac{\text{ا}}{\text{۱ - لا}}$ اس لامتناہی سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے یا سلسلہ تفاعل کا تعین کرتا ہے۔ اگر لا ایک سے بڑا ہو تو سلسلہ متسع ہوتا ہے اور یہ تفاعل $\frac{\text{ا}}{\text{۱ - لا}}$ کو مطلق تعبیر نہیں کرسکتا۔ عملی نقطہ نظر سے صرف مستدق سلسلے زیادہ تر کارآمد ہوتے ہیں، سوائے بعض قیود کے ان پر اسی آسانی سے ریاضی اعمال صادر ہو سکتے ہیں جو محدود رقموں والے جملات پر، غیر مستدق سلسلے صرف خاص خاص حالات کے ماتحت استعمال میں آتے ہیں۔

جب ایک سلسلہ دیا گیا ہو تو سلسلہ ہندسیہ کی طرح اس عدد کی فوراً تخصیص کرلینا جو $\text{س}_{\text{ن}}$ کی انتہا ہو ایسا آسان نہیں ہوتا۔ پس اس امر کی تحقیق کے لئے کہ کسی خاص صورت میں سلسلہ کی انتہا ہے بھی یا نہیں کسی جانچ کا قائم کرنا ضروری ہے، اس غرض سے ہم ذیل کے تین مسائل بیان کرتے ہیں جو علاوہ ازیں سلسلوں کے استدقاق کے متعلق چند سادہ آزمائشی اصولوں کے منضبط کرنے میں کارآمد ہوں گے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ متغیر $\text{س}_{\text{ن}}$، ن کا ایک قیمت والا تفاعل ہے، اس میں ن کو لا انتہا بڑھانا پڑے گا۔ چونکہ تمام انتہاؤں میں ن ← ∞، اس لئے عمل میں ہم لاحقہ ن ← ∞ کو حذف کر دینگے۔

مسئلہ ۱- اگر $\text{س}_{\text{ن}}$، ن کا ایک ایسا تفاعل ہو جو (۱) ن کے بڑھنے سے

ہمیشہ بڑھے لیکن (۲) ایک محدود مقدار ا سے ہمیشہ کم رہے تو ن کے لاانتہا بڑھنے سے یہ ایک خاص انتہا کی طرف مستدق ہوگا جو ا سے کم یا ا کے مساوی ہوگی۔

مسئلہ ۲ ۔ اگر سن، ن کا ایک ایسا تفاعل ہو جو (۱) ن کے بڑھنے سے ہمیشہ گھٹے لیکن (۲) ایک خاص مقدار ب سے ہمیشہ بڑا رہے تو ن کے لاانتہا بڑھنے سے یہ ایک خاص مقدار کی طرف مستدق ہوگا جو ب سے زیادہ یا ب کے مساوی ہوگی۔

مسئلہ ۳۔ اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ ن کے لاانتہا بڑھنے سے سن ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو یہ ہے کہ ن کے لاانتہا بڑھنے سے (سن+ف − سن) کی انتہا ف کی ہر ایک قیمت کے لئے صفر ہو۔ دوسرے الفاظ میں فرض کرو کہ صہ کوئی اختیاری چھوٹی مثبت مقدار ہے۔ اگر ن کی ایسی قیمت مثلاً ن = م معلوم ہو سکے کہ جب ن ≥ م تو فرق (سن+ف − سن) تعداداً کم ہو صہ سے ف کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے تو سن کے استدقاق کے لئے یہ شرط ضروری اور کافی ہوگی۔

ہم ان مسئلوں کے یہاں ثبوت نہیں دینگے، مسئلہ ۱ اور ۲ بطور مشق کے اس سے قبل (مشق، سوال ۱۴، ۱۵ حصۂ اول میں) دئے گئے ہیں اور جو ہندسی توضیح ان کی وہاں دی گئی ہے اس کی بنا پر ہم ان کی صداقت کو ماننے کے مجاز ہیں۔ مسئلہ ۳ کے متعلق ہم بآسانی دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر کی شرط ضروری ہے۔ کیونکہ اگر سن کی معین انتہا س ہو تو

$$(س_{ن+ف} - س_{ن}) = (س_{ن+ف} - س) + (س - س_{ن})$$

اسلئے نہا $(س_{ن+ف} - س_{ن})$ = نہا $(س_{ن+ف} - س)$ + نہا $(س - س_{ن})$ =

یہ ثابت کرنے کے لئے کہ یہ شرط کافی ہے محور لا پر نقطے $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$ ...... لو جن کے فصلے بالترتیب $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ ...... ہیں۔ اس صورت میں $ا_ن$، $ا_{ن+۱}$ کے دائیں بائیں کسی جانب واقع ہو سکتا ہے کیونکہ ن کے بڑھنے سے $س_ن$ لازمی طور پر نہ ہمیشہ بڑھتا ہے اور نہ ہمیشہ گھٹتا ہے۔ لیکن حسب مفروض اگر ن ≥ م تو

$$|س_{ن+ف} - س_ن| < صہ، \text{ یعنی } س_م - صہ < س_{م+ف} < س_م + صہ$$

اگر ط، ق وہ نقطے ہوں جنکے فصلے $س_م - صہ$ اور $س_م + صہ$ ہیں تو حصے ط ق کا طول ۲ صہ ہوگا اور ہر ایسا نقطہ $ا_ن$ جس کی صورت میں ن بڑا ہے م سے اس حصہ کے اندر واقع ہوگا۔ صہ کو بتدریج چھوٹی اور چھوٹی قیمتیں دینے سے یہ حصے بتدریج کم ہوتی جائینگے ط ق، ط′ ق′، ط″ ق″ ...... جن میں سے ہر ایک حصہ پہلے کے اندر واقع ہوتا ہے نقاط ط، ط′، ط″ ...... دائیں جانب حرکت کرتے ہیں اور ق، ق′، ق″ ...... بائیں جانب۔ مسئلہ (۱) کی رو سے ط، ط′، ط″ ...... ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہوتے ہیں اور مسئلہ (۲) کی رو سے ق، ق′، ق″ ...... بھی ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہوتے ہیں۔ نیز چونکہ صہ کو ہم اتنا چھوٹا مان سکتے ہیں جتنا چاہیں اس لئے یہ دونوں انتہائیں (فرض کرو نقطہ لا) پر منطبق ہوتی ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ نقاط $ا_ن$ کی انتہا لا کی طرف مائل ہوتی ہے اور لا کا فصلہ س، $س_ن$ کی انتہا ہے۔

مشق۔ حصہ اول کے سوالات ۱۶ اور ۱۷ سے مسئلہ (۱) کی توضیح ہوتی ہے۔ مسئلہ (۳) کی توضیح کے لئے فرض کرو کہ

$$س_ن = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + ... + (-۱)^{ن-۱}\frac{۱}{ن}$$

یہاں $س_{ن+ف} - س_ن = \pm\left(\frac{۱}{ن+۱} - \frac{۱}{ن+۲} + ... \pm \frac{۱}{ن+ف}\right)$

اور $\frac{1}{\text{ن}+1} - \frac{1}{\text{ن}+2} + \ldots \pm \frac{1}{\text{ن}+\text{ف}} = \frac{1}{\text{ن}+1} - \left(\frac{1}{\text{ن}+2} - \frac{1}{\text{ن}+3}\right) - \ldots$

$< \frac{1}{\text{ن}+1}$ کیونکہ ہر خطوط وحدانی کے اندر کا جملہ مثبت ہے۔

اگر ف جفت ہو تو آخری خطوط وحدانی میں صرف ایک رقم ہوگی $\frac{1}{\text{ن}+\text{ف}}$۔

نیز $\frac{1}{\text{ن}+1} + \frac{1}{\text{ن}+2} + \frac{1}{\text{ن}+3} + \ldots \pm \frac{1}{\text{ن}+\text{ف}} = \left(\frac{1}{\text{ن}+1} - \frac{1}{\text{ن}+2}\right)$

$+ \left(\frac{1}{\text{ن}+3} - \frac{1}{\text{ن}+4}\right) + \ldots$

بائیں طرف کا جملہ مثبت ہے۔ اسلئے $|\text{س}_{\text{ن}+\text{ف}} - \text{س}_{\text{ن}}|$ صفر اور $\frac{1}{\text{ن}+1}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اسلئے $\text{س}_{\text{ن}+\text{ف}} - \text{س}_{\text{ن}}$ کی انتہا صفر ہے اور $\text{س}_{\text{ن}}$ ایک معین انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھینگے کہ یہ انتہا لوک ۲ ہے (دفعہ ۴۴ (۵))۔ پس

$$\text{لوک}\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

ظاہر ہے کہ اگر $\text{س}_{\text{ن}}$ کی بجائے کوئی لا کا مسلسل تفاعل ف (لا) ہو تو بھی یہ تینوں مسئلے (۱)، (۲)، (۳) اسکی صورت میں درست رہینگے۔
اگر لا ایک محدود انتہا لا_1 کیطرف مائل ہوتا ہو تو ہم لا کی بجائے $\text{لا}_1 \pm \frac{1}{\text{ن}}$ رکھ سکتے ہیں، اس طرح ن کے لا انتہا بڑھنے سے لا کی انتہا لا_1 ہوگی۔ اگر لا مائل بہ ∞ ہوتا ہو تو ہم لا کی بجائے ن رکھ سکتے ہیں۔

۴۰۔ استدقاق پرکھنے کے طریقے۔ اگر لامتناہی سلسلے ح۶ کا

مجموعہ س سے تعبیر کیا جائے اور اس کی ن رقموں کا $س_ن$ سے تو فرق $س - س_ن$ کو باقی کہتے ہیں ن رقموں کے بعد۔
اگر اس باقی کو $ب_ن$ لکھیں تو

$$س = س_ن + ب_ن$$

صریحاً $ب_ن$ خود ایک لاتناہی سلسلہ ہے $ع_{ن+۱} + ع_{ن+۲} + ع_{ن+۳} + \ldots$
اور $ب_ن$ کی انتہا صفر ہے۔ اگر سلسلہ ایسا ہو کہ $|ب_ن|$ چھوٹا ہو جبکہ ن چھوٹا ہو تو سلسلہ سرعت سے مستدق ہوتا ہے کیونکہ سلسلہ کی صرف چند رقمیں لینے سے س کی قیمت کا اچھا اندازہ لگ سکتا ہے۔ سلسلوں کی قیمتوں کے محسوب کرنے میں استدقاق کی سرعت خاص اہمیت رکھتی ہے، لیکن یاد رہے کہ ایک سلسلہ مستدق ہی کہلائے گا خواہ اسکی قیمت کا معمولی اندازہ لگانے میں دس لاکھ رقموں کی ضرورت ہو۔

بنیادی پرکھ یا جانچ۔ فرض کرو کہ $_فب_ن$ ، $س_{ن+ف} - س_ن$ کو تعبیر کرتا ہے یعنی

$$_فب_ن = ع_{ن+۱} + ع_{ن+۲} + ع_{ن+۳} + \ldots + ع_{ن+ف}$$

تب $ب_ن$ کو ن رقموں کے بعد جزوی باقی کہینگے۔ دفعہ ۲۹ مسئلہ ۳ کی رُو سے اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ مج ع مستدق ہو یہ ہے کہ $ب_ن$ کی انتہا ف کی ہر قیمت کے لئے صفر ہو۔

اگر ف = ۱ تو $ب_ن = ع_{ن+۱}$ ، اس لئے استدقاق کی ایک ضروری شرط یہ ہے کہ $ع_{ن+۱}$ یا (جو وہی بات ہے کہ) $ع_ن$ مائل بہ صفر ہو، مگر ہم آگے دیکھینگے (مثال ۱) کہ یہ شرط کافی نہیں ہے۔

اِس جانچ کو آسانی سے استعمال نہیں کیا جا سکتا، اِس لئے ہم ایک دو اور جانچ کے طریقے حاصل کرتے ہیں جو آسانی استعمال میں آسکیں۔

مقابلہ کی جانچ۔ فرض کرو کہ $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \ldots\ldots$ مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے۔ اگر اِس سلسلہ کی ہر ایک رقم، ایک اور مثبت رقموں والے مستدق سلسلہ $\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \ldots\ldots$ کی متناظر رقم سے کم ہو یا مساوی ہو تو سلسلہ $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \ldots\ldots$ بھی مستدق ہوگا لیکن اگر اِس سلسلہ کی ہر ایک رقم مثبت رقموں والے ایک منتشع سلسلہ $\text{ب}_1 + \text{ب}_2 + \ldots\ldots$ کی متناظر رقم کے مساوی ہو یا اِس سے بڑی ہو تو سلسلہ $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \ldots\ldots$ بھی منتشع ہوگا۔

فرض کرو کہ $\text{س}_{\text{ن}} = \sum_1^{\text{ن}} \text{ع}$ ، $\text{ص}_{\text{ن}} = \sum_1^{\text{ن}} \text{ا}$ ، $\text{ص} = \text{نہا}\ \text{ص}_{\text{ن}}$

تب $\text{س}_{\text{ن}} \leqq \text{ص}_{\text{ن}}$ ، $\text{ص}_{\text{ن}} < \text{ص}$ کیونکہ سلسلہ $\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \ldots\ldots$ کی سب رقمیں مثبت ہیں، اس لئے $\text{س}_{\text{ن}}$ ، جو ن کے بڑھنے سے بڑھتا ہے ہمیشہ ص سے کم رہتا ہے یعنی $\text{س}_{\text{ن}}$ ایک ایسی انتہا س کی طرف مستدق ہوتا ہے جو ص سے کم ہے یا اِس کے مساوی ہے [دفعہ ۲۹ مسئلہ ۱)

انتشاع کی صورت میں ثبوت طالب علم خود مہیا کرے۔

نوٹ۔ یہاں ایک بات قابل توجہ ہے کہ استدقاق کے لئے کسی سلسلہ کی جانچ کرنے میں اگر ہم ضرورت خیال کریں تو رقموں کی کسی محدود تعداد سے قطع نظر کر سکتے ہیں، اِن رقموں کا اخراج صرف انتہا کی قیمت پر اثر رکھیگا لیکن انتہا کے وجود پر اِس کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔

مثال ۱۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots$ کو موسیقی سلسلہ کہتے ہیں ثابت کرو کہ یہ منتشع ہے باوجود اِس کے کہ $\text{ع}_{\text{ن}} \to 0$۔

تیسری رقم سے شروع ہو کر سلسلہ وار ۲ رقمیں، پھر ۴ یا 2^2 رقمیں، پھر ۸ یا 2^3 رقمیں وغیرہ لو۔

اب $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8}$ یا $\frac{1}{2}$

اور اسی طرح۔

پس 2^m رقموں تک مجموعہ بڑا ہے ذیل کے سلسلہ سے

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \text{م رقموں تک}$$

یعنی بڑا ہے $1 + \frac{m}{2}$ سے۔ اسلئے ن کو ہم اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ S_n کسی بڑے سے بڑے مفروضہ عدد سے بڑا ہو یعنی سلسلہ متسع ہے۔

مثال ۲۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots\ldots$ مستدق ہوگا اگر $p > 1$ اور متسع ہوگا اگر $p \leqq 1$

(۱) $p > 1$ دوسری رقم سے شروع ہو کر رقموں کو اکٹھا کرو جیسے مثال اول

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} > \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \text{ یا } \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} > \frac{4}{4^p} \text{ یا } \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$$

وغیرہ وغیرہ

پس مجوزہ سلسلہ ذیل کے سلسلہ سے کم ہے

$$1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

جو ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی نسبت مشترک ایک سے کم ہے۔ اس لئے یہ مستدق ہے۔ مجوزہ سلسلہ بھی اس لئے مستدق ہے۔

(۲) $p \leqq 1$، صورت $p = 1$ پر مثال (۱) میں بحث کی گئی ہے۔ جب $p < 1$ تو سلسلہ کی رقمیں موسیقی سلسلہ کی متناظر رقموں سے بڑی ہوتی ہیں۔ اس لئے اس صورت میں سلسلہ متسع ہے۔

جانچ کی نسبت۔ فرض کرو کہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots\dots$ مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے اور ن ← ∞ کے لئے $\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن}$ کی انتہا ک ہے یہ سلسلہ مستدق ہوگا اگر ک < ۱ اور متسع ہوگا اگر ک > ۱، اگر ک = ۱ تو یہ جانچ استدقاق پرکھنے میں کارگر نہیں ہوگی۔

(۱) ک < ۱ انتہا کی تعریف کے بموجب ہم ن کو اسقدر بڑا لے سکتے ہیں (مثلاً ن = م) کہ جب ن ≥ م تو نسبت $\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن}$ اور ک کا فرق اسقدر کم ہو جسقدر ہم چاہیں گویا یہ نسبت اس منزل کے بعد ایک کسر واجب ر سے کم ہو۔

اگر م کا اس طرح انتخاب کیا جائے کہ

تو $ع_{م+1} < ع_م ر،\quad ع_{م+2} < ع_{م+1} ر < ع_م ر^2،\quad ع_{م+3} < ع_م ر^3$

وغیرہ، اسلئے رقم $ع_م$ کے بعد سلسلہ کی ہر ایک رقم ذیل کے سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقم سے کم ہوگی

$$ع_م ر + ع_م ر^2 + ع_م ر^3 + \dots\dots$$

چونکہ ر < ۱ اس لئے مجوزہ سلسلہ مستدق ہے۔

(۲) ک > ۱، حسب بالا ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ سلسلہ متسع ہوگا جبکہ ک > ۱

نتیجہ صریح۔ دئے ہوئے سلسلہ کی باقی $ب_م$ کم ہے ذیل کے سلسلہ سے

$ع_م ر + ع_م ر^2 + \dots\dots$ یعنی $ع_م ر/(۱ - ر)$ سے۔

مثال ۳۔ $۱ + لا + \frac{لا^2}{۲} + \frac{لا^3}{۳} + \dots\dots$ (لا مثبت)

$$\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن} = \frac{لا^ن}{ن} \div \frac{لا^{ن-1}}{ن-1}$$

$$= \frac{ن-1}{ن} لا$$

$$ک = لا$$

اس لئے سلسلہ مستدق ہوگا اگر $لا < 1$ اور منسع ہوگا اگر $لا > 1$
اگر $لا = 1$ تو یہ موسیقی سلسلہ ہے اور متسع ہے۔

مثال ۴۔ $1 + لا + \frac{لا^2}{\lfloor 2} + \frac{لا^3}{\lfloor 3} + \dots\dots\dots$ (لا مثبت)

$$\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن} = \frac{لا}{ن}، \quad ک = ۰$$

اس لئے یہ سلسلہ (قوت نمائی سلسلہ، دفعہ ۹۴ حصہ اول) لا کی ہر مثبت قیمت کے لئے مستدق ہے۔ ابھی ہم دیکھینگے کہ یہ لا کی ہر مثبت یا منفی قیمت کے لئے مستدق ہے۔

۴۱۔ استدقاق مطلق، قوتی سلسلے

مسئلہ ۱۔ اگر کسی سلسلہ میں ہر دو مثبت اور منفی رقمیں موجود ہوں اور یہ مستدق ہو جبکہ تمام منفی رقموں کی علامت بدل دیجائے تو یہ اپنی اصلی حالت میں بھی مستدق ہوگا۔

یہ ظاہر ہے کیونکہ منفی علامتوں کو بحال کرنے سے $|س_ن|$ اور $|ب_ن|$ دونوں مقدار میں کم ہونگے۔

تعریف ۱۔ اگر کسی سلسلہ میں مثبت، منفی رقمیں دونوں طرح کی موجود ہوں اور اس کی منفی رقموں کو مثبت بنانے سے جو سلسلہ بنے وہ مستدق ہو تو اصطلاحاً اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ اصلی سلسلہ مطلق طور پر یا بلا قید مستدق ہے۔

یعنی $ع_1 + ع_2 + ع_3 + ع_4 + \dots\dots$ مطلق طور پر مستدق ہوگا اگر $|ع_1| + |ع_2| + |ع_3| + \dots$

مستدق ہو۔ کسی اور طرح کے مستدق سلسلے کو نیم مستدق یا مستدق بالشرط کہینگے۔
مسئلہ ۱ کا عکس درست نہیں، سلسلہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \ldots$ مستدق ہو سکتا ہے
اور $|ع_1| + |ع_2| + |ع_3| + \ldots$ متنبع (ملاحظہ ہو مثال ۱)

نتیجہ صریح۔ ایک سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوگا اگر $\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن}$ کی انتہا **عددا** ایک کسر واجب کے مساوی ہو۔

مطلق طور پر مستدق سلسلے خاص اہمیت رکھتے ہیں، رقموں کی ترتیب کے بدلنے سے مجموعہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ مستدق بالشرط سلسلہ کی رقموں کو اسی طرح پر ترتیب دینا ممکن ہے کہ نیا سلسلہ جو پیدا ہو وہ مستدق ہو لیکن کسی اور انتہا کی طرف استدقاق کرے یا یہاں تک کہ متنبع ہو جائے۔ الفاظ "بالشرط" اور "بلاشرط" کی یہی وجہ تسمیہ ہے۔ [ملاحظہ ہو جبر و مقابلہ کرسٹل حصۂ دوم باب ۲۶، دفعہ ۱۳]

مسئلہ ۲۔ اگر مقادیر $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، .... سب مثبت ہوں اور ان میں سے ہر ایک اپنی رقم ماقبل سے کم ہو (یا اس کے مساوی ہو) نیز اگر $ع_ن$ کی انتہا صفر ہو تو سلسلہ

$$ع_1 - ع_2 + ع_3 - ع_4 + \ldots + (-1)^{ن-1} ع_ن + \ldots\ldots$$

مستدق ہوگا۔ اس سلسلہ کو متبادل سلسلہ کہا جا سکتا ہے۔
رقموں کی جفت تعداد کا مجموعہ ہم ذیل کی دو صورتوں میں لکھ سکتے ہیں۔

$$س_{2ن} = (ع_1 - ع_2) + (ع_3 - ع_4) + \ldots + (ع_{2ن-1} - ع_{2ن})$$

$$= ع_1 - (ع_2 - ع_3) - (ع_4 - ع_5) - \ldots\ldots - ع_{2ن}$$

پہلی صورت سے ظاہر ہے کہ $س_{2ن}$ مثبت ہے اور ن کے بڑھنے سے بڑھتا ہے
دوسری صورت سے ظاہر ہے کہ $س_{2ن}$، $ع_1$ سے کم ہے کیونکہ ہر فرق مثبت ہے،

اس لئے سن ایک انتہا (مثلاً س) کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

نیز $س_{۲ن+۱} = س_{۲ن} + ع_{۲ن+۱}$، اب چونکہ نہا $ع_{۲ن+۱}$ صفر ہے،

اس لئے $س_{۲ن+۱}$ اور $س_{۲ن}$ کی ایک ہی انتہا ہے، اس لئے سلسلہ مستدق ہے۔

نتیجہ صریح $|ب_ن|$ کم ہے $ع_{ن+۱}$ سے۔

مثال ۱۔ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots\dots$

سلسلہ تمام شرائط کو پورا کرتا ہے، اس لئے مستدق ہے جیسا کہ اس سے قبل (دفعہ ۳۹) میں بتایا گیا۔ لیکن سلسلہ

$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots\dots$ منتشر ہے۔

مسئلہ ۳۔ اگر سلسلہ $ع_۱ + ع_۲ + \dots\dots$ مطلق طور پر مستدق ہو اور

$و_۱، و_۲، و_۳، \dots\dots$ میں سے ہر ایک مقدار ایک محدود مقدار ج سے کم ہو تو سلسلہ $ع_۱ و_۱ + ع_۲ و_۲ + ع_۳ و_۳ + \dots\dots$ مطلق طور پر مستدق ہوگا۔

سلسلہ $|ع_۱ و_۱| + |ع_۲ و_۲| + \dots\dots$ کی رقمیں ذیل کے سلسلہ کی متناظر رقموں سے کم ہیں

$$|ع_۱| ج + |ع_۲| ج + \dots\dots \text{ یا } ج \{|ع_۱| + |ع_۲| + \dots\}$$

اس لئے $|ع_۱ و_۱| + |ع_۲ و_۲| + \dots\dots$ مستدق ہے اور اسلئے $ع_۱ و_۱ + ع_۲ و_۲ + \dots\dots$ مطلق طور پر مستدق ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{جب ل}{۱} - \frac{جب ۲ل}{۲^۲} + \frac{جب ۳ل}{۳^۲} - \frac{جب ۴ل}{۴^۲} + \dots\dots$

سلسلہ $\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} - \frac{۱}{۴^۲} + \dots\dots$ مطلق طور پر مستدق ہے اور

کوئی جیب ایک سے بڑی نہیں ہوسکتی۔ اس لئے لا کی سب قیمتوں کے لئے سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہے۔

تعریف ۲۔ لا کی صعودی صحیح قوتوں میں ذیل کی شکل کے سلسلہ کو

$$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots\ldots + ا_ن لا^ن + \ldots\ldots \quad (ع)$$

جہاں سر مستقل ہیں ہم لا کا قوتی سلسلہ کہینگے۔ زیادہ تر قوتی سلسلے ہی بحث میں آتے ہیں۔ ذیل کے مسائل ضروری ہیں۔

مسئلہ ۴۔ اگر $\frac{ا_{ن+۱}}{ا_ن}$ کی انتہا تعدادًا $\frac{۱}{ر}$ ہو، تو قوتی سلسلہ (ع) مطلق طور پر مستدق ہوگا جبکہ لا تعدادًا ر سے کم ہو اور ممتنع ہوگا جبکہ لا تعدادًا ر سے بڑا ہو، نیز اس صورت میں جبکہ لا، ر کے مساوی ہو تو یہ جانچ کارگر نہیں ہوتی، سلسلہ مستدق ہوسکتا ہے یا ممتنع۔

پہلی رقم ا۰ سے قطع نظر کرکے

$$\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} = \frac{ا_{ن+۱}}{ا_ن} لا \quad (تعدادًا)$$

$$\text{نہا} \; \frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن} = لا \; \text{نہا} \; \frac{ا_{ن+۱}}{ا_ن} = \frac{لا}{ر}$$

مسئلہ ۱ نتیجہ صریح کی رو سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

ذیل کا مسئلہ زیادہ عام ہے۔

مسئلہ ۵۔ اگر سلسلہ (ع) میں لا کی بجائے ر لکھا جائے اور اس طرح جو سلسلہ حاصل ہو اس کی کوئی رقم بھی ایک محدود مقدار ج سے بڑی نہ ہو تو سلسلہ (ع) مطلق طور پر مستدق ہوگا جب تک کہ لا تعدادًا ر سے کم رہے۔

سلسلہ (ع) کو اس شکل میں

$$ا_۰ + ا_۱ ر \left(\frac{لا}{ر}\right) + ا_۲ ر^۲ \left(\frac{لا}{ر}\right)^۲ + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی رقمیں ذیل کے ہندسی سلسلہ کی متناظر رقموں سے بڑی ہیں

$$ج + ج\left(\frac{لا}{ر}\right) + ج\left(\frac{لا}{ر}\right)^{۲} + \cdots\cdots$$

اس لئے سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہے جبتک کہ $\frac{لا}{ر}$ تعداداً ایک سے کم ہو۔ اُس صورت میں جبکہ لا = ر سلسلہ مستدق ہو سکتا ہے یا منتشع، لیکن اگر یہ مستدق ہو تو سلسلہ کی ہر ایک رقم جبکہ لا = ر محدود ہوگی اور سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوگا جبکہ لا، ر سے تعداداً کم ہو۔

استدقاق کا وقفہ۔ جب ایک سلسلہ جسکی رقمیں لا کے تفاعل ہوں مستدق ہو جبکہ ا $<$ لا $<$ ب تو ہم اسے یوں بیان کر سکتے ہیں کہ سلسلہ وقفہ (ا، ب) کے اندر مستدق ہے، جب سلسلہ لا کی قیمتوں ا $<$ لا $<$ ب کے لئے مستدق ہو اور منتشع ہو لا $<$ ا اور لا $>$ ب کے لئے تو (ا، ب) کو استدقاق کا وقفہ کہتے ہیں۔

مثال ۳۔ سلسلہ $لا - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳} - \frac{لا^{۴}}{۴} + \cdots\cdots$

مستدق ہے (شرطاً) جبکہ لا = ۱، اسلئے مطلق طور پر مستدق ہے جبکہ ۱- $<$ لا $<$ ۱، یہ منتشع ہے جبکہ لا = ۱- اور جبکہ $|لا| > ۱$

مثال ۴۔ سلسلہ $لا - \frac{لا^{۲}}{۲^{۲}} + \frac{لا^{۳}}{۳^{۲}} - \frac{لا^{۴}}{۴^{۲}} + \cdots\cdots$

مطلق طور پر مستدق ہے جبکہ $-۱ \leqq لا \leqq ۱$، منتشع ہے جبکہ $|لا| > ۱$۔ دونوں سلسلوں کے لئے (۱-، ۱) استدقاق کا وقفہ ہے۔

۴۲۔ یکساں استدقاق۔ جب ایک سلسلہ کی رقمیں لا کے تفاعل ہوں اور سلسلہ ایک وقفہ کے اندر مستدق ہو تو وقفہ میں کی کسی ایک معلومہ قیمت لا کے لئے ن کو اس طور پر منتخب کرنا ممکن ہوگا کہ باقی $ب_ن$ ایک دی ہوئی مقدار

کہ ہو لیکن لا کی مختلف قیمتوں کے لئے بالعموم ن کی مختلف قیمتیں ہونگی جو باقی کو دی ہوئی مقدار سے کم بنائینگی۔ اسلئے

تعریف۔ ایک سلسلہ جسکی رقمیں لا کے تفاعل ہوں ایک وقفہ کے اندر یکساں طور پر مستدق کہلاتا ہے اگر ن کو اس طور پر منتخب کرنا ممکن ہو مثلاً $\text{ن} = \text{م}$ کہ ن کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو م کے مساوی یا اس سے بڑی ہو اور لا کی **ہر ایسی قیمت کے لئے جو وقفہ مذکورہ کے اندر واقع ہو باقی** $\text{ب}_{\text{ن}}$ ایک دی ہوئی مثبت مقدار صہ سے کم رہے۔

تغیر کو پیش نظر رکھنے کے لئے ہم یہ ترقیم اختیار کرینگے

$$\text{ع}_{\text{ن}}(\text{لا}),\ \text{س}_{\text{ن}}(\text{لا}),\ \text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}),\ \text{س}(\text{لا})$$

مسئلہ ۱۔ اگر ایک سلسلہ $\text{ع}_{1}(\text{لا}) + \text{ع}_{2}(\text{لا}) + \dots$ یکساں طور پر مستدق ہو جبکہ $\text{ا} \leq \text{لا} \leq \text{ب}$ اور اگر اسی وقفہ کے اندر سلسلہ کی ہر رقم لا کا مسلسل تفاعل ہو تو مجموعہ $\text{س}(\text{لا})$ بھی اس وقفہ میں مسلسل تفاعل ہوگا۔

فرض کرو کہ سعت کے اندر متغیر کی دو قیمتیں لا اور لا_{1} ہیں، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ اگر صہ مقرر کر لیا جائے تو لا_{1} کو لا کے اسقدر قریب لینا ممکن ہے کہ $|\text{س}(\text{لا}_{1}) - \text{س}(\text{لا})|$ صہ سے کم ہو۔ معمولی ترقیم کے مطابق

$$\text{س}(\text{لا}_{1}) - \text{س}(\text{لا}) = \text{س}_{\text{ن}}(\text{لا}_{1}) - \text{س}_{\text{ن}}(\text{لا}) + \text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}_{1}) - \text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا})$$

اور اسلئے $|\text{س}(\text{لا}_{1}) - \text{س}(\text{لا})| \leq |\text{س}_{\text{ن}}(\text{لا}_{1}) - \text{س}_{\text{ن}}(\text{لا})| + |\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}_{1})| + |\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا})|$

اولاً چونکہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہے ہم م کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اس صورت میں جبکہ $\text{ن} \geq \text{م}$ دونوں $\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}_{1})$ اور $\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا})$، $\frac{\text{صہ}}{۲}$ سے کم ہوں۔ فرض کرو کہ م کو اس طرح پر منتخب کر لیا گیا ہے۔

دوسرے $\text{س}_{\text{م}}(\text{لا})$ مسلسل تفاعلوں کی محدود تعداد کا مجموعہ ہے، اسلئے ہم

x_1 کو x کے اتنا قریب لا سکتے ہیں کہ $|S_m(x_1) - S_m(x)| \; \frac{\epsilon}{3}$ سے کم ہو۔

ان دو نتائج کو ملانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x_1 کو x کے اتنا قریب لا سکتے ہیں کہ $|S(x_1) - S(x)|$، $\frac{\epsilon}{3}$ کے تین گنا یعنی ϵ سے کم ہو۔

پس مسئلہ اس صورت میں ثابت ہوا جبکہ x وقفہ کے اندر واقع ہو۔ اگر $x = a$ یا b تو ثبوت میں تھوڑی ترمیم کی ضرورت ہوگی۔ اس کو طالب علم کے لئے چھوڑا گیا ہے۔

مسئلہ ۲۔ قوتی سلسلہ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$ اپنے وقفہ استدقاق $(-r, r)$ کے اندر ایک مسلسل تفاعل ہوتا ہے۔ لیکن ایسا ممکن ہے کہ وقفہ کے سرے پر یہ غیر مسلسل ہو جائے۔

ہم ثابت کرینگے کہ اگر $-r < a \leq x \leq b < r$ تو سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوگا، اسکے بعد نتیجہ مطلوبہ مسئلہ (۱) سے حاصل ہو جائیگا۔

عدد c ایسا لو جو r سے کم ہو لیکن $|a|$ یا $|b|$ دونوں سے بڑا ہو، تب دفعہ ۴۱ مسئلہ ۵ کی رو سے سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوگا جبکہ $x = c$، نیز اگر $a \leq x \leq b$

$$a_n x^n = a_n c^n \left(\frac{x}{c}\right)^n, \quad |a_n x^n| < |a_n c^n|$$

$$\text{اس لئے } \; R_n(x) < |a_n c^n| + |a_{n+1} c^{n+1}| + \ldots\ldots$$

لیکن سلسلہ $a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \ldots\ldots$ مطلق طور پر مستدق ہے، ہم m کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جب، } n \geq m \text{ تو باقی } |a_n c^n| + |a_{n+1} c^{n+1}| + \ldots\ldots$$

ϵ سے کم ہو یعنی اس m کے لئے باقی $R_n(x)$، ϵ سے کم ہوگی لیکن یہ یکساں استدقاق کے لئے شرط ہے۔

ثبوت کے لئے ضروری ہے کہ لا وقفہ کے اندر ہو، ذیل کے مسئلہ (ایبل کے مسئلہ) کے ثبوت کے لئے ملاحظہ ہو کرسٹل کا الجبرا، حصۂ دوم، باب ۲۶، دفعہ ۲۰ یعنی اگر ایک سلسلہ مستدق ہو جبکہ لا = ر (یا − ر) تو جو تفاعل سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے وہ مسلسل ہوگا قیمت ر (یا − ر) تک اور شمولیت خود ان قیمتوں کے، دوسرے الفاظ میں تفاعل کی قیمت جبکہ لا = ر وہی ہوگی جو کہ سلسلہ کی قیمت ہے جبکہ لا = ر۔

جس طریقہ سے قوتی سلسلہ کا یکساں استدقاق قائم کیا گیا ہے اس کی بآسانی توسیع ہوسکتی ہے ذیل کے مسئلہ کے اثبات میں۔

مسئلہ ۳۔ اگر ایک سلسلہ کی رقمیں لا کے مسلسل تفاعل ہوں جبکہ ا ≥ لا ≥ ب اور یہ رقمیں، ایک مطلق طور پر مستدق سلسلہ کی متناظر رقموں سے جن میں لا شامل نہیں ہوتا تعداداً کم ہوں تو اول الذکر سلسلہ وقفہ مذکورہ کے اندر یکساں طور پر مستدق ہوگا۔

طالب علم یکساں اور مطلق استدقاق میں التباس نہ کرے، سلسلے یکساں طور پر مستدق ہوسکتے ہیں حالانکہ وہ مطلق طور پر مستدق نہ ہوں، مگر ایسے سلسلے ہماری کتاب کی حدود سے باہر ہیں۔

ذیل کی مشق میں سوالات ۹، ۱۰، ۱۱ خاص طور پر قابل توجہ ہیں۔

مشق ۱۲

۱۔ ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں

(۱) $۱ + ۲^{-۲} + ۳^{-۳} + ۴^{-۴} + \dots\dots$　　(۲) $لا + لا^{۴} + لا^{۹} + لا^{۱۶} + \dots$ $(۰ < لا < ۱)$

(۳) $\frac{۱}{(ا+۱)^{ع}} + \frac{۱}{(ا+۲)^{ع}} + \frac{۱}{(ا+۳)^{ع}} + \dots\dots$ $(ا > ۰،\ ع > ۱)$

۲۔ ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے متسع ہیں

(۱) $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} + \dots\dots$　　(۲) $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \dots\dots$

(۳) $\sum \frac{1}{(\text{ا}+\text{ن})}$ (۴) $\sum \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}^2+1}$

(۵) $\sum \frac{\text{ا ن}+\text{ب}}{\text{ج ن}^2+\text{د}}$ $[\text{ا} \neq 0]$

۳۔ اگر $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\dots = \text{ج}$

تو ثابت کرو کہ (۱) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots = \frac{1}{4}\text{ج}$

(۲) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots = \frac{3}{4}\text{ج}$

ج کی قیمت $\frac{\pi^2}{6}$ ہے (مشق ۱۳ سوال ۲۲)

۴۔ ثابت کرو کہ ذیل کا سلسلہ (سلسلۂ ثنائی)

$$1+\text{م}\,\text{لا}+\frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times 2}\text{لا}^2+\frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{1\times 2\times 3}\text{لا}^3+\dots\dots$$

م کی ہر قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہے جبکہ $|\text{لا}| < 1$، لیکن متسع ہے جبکہ $|\text{لا}| > 1$

کیونکہ $\frac{\text{ع}_{\text{ن}+1}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \frac{\text{م}-\text{ن}+1}{\text{ن}}\text{لا} = \left(\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}-1\right)\text{لا}$ نہا $\left|\frac{\text{ع}_{\text{ن}+1}}{\text{ع}_{\text{ن}}}\right| = |\text{لا}|$

۵۔ اگر ف(ن)، ن کا ایک منطق، صحیح تفاعل ہو تو سلسلہ $\sum \text{ف}(\text{ن})\,\text{لا}^{\text{ن}}$ مطلق طور پر مستدق ہوگا جبکہ $|\text{لا}| < 1$ لیکن متسع ہوگا جبکہ $|\text{لا}| > 1$

فرض کرو کہ $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ا ن}^{\text{ک}}+\text{ب ن}^{\text{ک}-1}+\dots\dots$ جہاں ف(ن) کا درجہ ک ہے، تب

$\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن} = \frac{ا_1 (ن+1) + ...}{ا_1 ن + ...}$ لا ، نہا $\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن}$ = لا

۶- اگر سلسلے مجـ ا ، مجـ ب مطلق طور پر مستدق ہوں تو ثابت کرو کہ سلسلے

(۱) $ا_0 + ا_1$ جم لا + $ا_2$ جم ۲ لا + $ا_3$ جم ۳ لا + ...

(۲) $ب_1$ جب لا + $ب_2$ جب ۲ لا + $ب_3$ جب ۳ لا + ...

لا کی ہر قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہیں اور لا کے مسلسل تفاعلوں کو تعبیر کرتے ہیں ، اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر (۱) [یا (۲)] ایک غیر مسلسل تفاعل کو تعبیر کرے تو مجـ ا (یا مجـ ب) مطلق طور پر مستدق نہیں ہو سکتا۔

۷- ثابت کرو کہ اگر لا > ۰ تو سلسلہ

$قو^{لا}$ جم (لا - $عـ_1$) + $قو^{۲لا}$ جم (۲ لا - $عـ_2$) + $قو^{۳لا}$ جم (۳ لا - $عـ_3$) + ...

ایک مسلسل تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔

۸- اگر لا ≧ ۰ اور اگر مجـ ا مطلق طور پر مستدق ہو تو سلسلہ

$ا_1 قو^{لا}$ جم (لا - $عـ_1$) + $ا_2 قو^{۲لا}$ جم (۲ لا - $عـ_2$) + $ا_3 قو^{۳لا}$ جم (۳ لا - $عـ_3$) + ...

ایک مسلسل تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔

۹- اگر وقفہ (- ر ، ر) کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے قوتی سلسلہ

$ا_0 + ا_1$ لا + $ا_2$ $لا^2$ + ... صفر ہو تو ثابت کرو کہ سلسلہ کا ہر ایک سر صفر ہے

اگر لا = ۰ تو سلسلہ کی ایک ہی رقم $ا_0$ رہ جاتی ہے ، اس لئے $ا_0$ = ۰

اب ۰ = $ا_1$ لا + $ا_2$ $لا^2$ + ... = لا ($ا_1$ + $ا_2$ لا + ...) = لا $ف_1$ (لا) [فرض کرو]
پس لا = ۰ یا $ف_1$ (لا) = ۰ ، فرض کرو کہ لا ≠ ۰ ، اس لئے $ف_1$ (لا) = ۰
لیکن $ف_1$ (لا) ایک مسلسل تفاعل ہے ، اسلئے $ف_1$ (لا) کی انتہا لا = ۰ کے لئے

وہی ہے جو ف(لا) کی قیمت ہے لا = ۰ کے لئے۔ اسلئے $ا_۱ = ۰$، اسی طرح $ا_۲ = ۰$، $ا_۳ = ۰$ وغیرہ

۱۰۔ منطابقاً مساوی ہونے کا مسئلہ۔ اگر دو سلسلے

$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots$ اور $ب_۰ + ب_۱ لا + ب_۲ لا^۲ + \ldots$ وقفہ (-ر، ر) کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ $ا_۰ = ب_۰$، $ا_۱ = ب_۱$، ....

اس صورت میں $۰ = (ا_۰ - ب_۰) + (ا_۱ - ب_۱) لا + (ا_۲ - ب_۲) لا^۲ + \ldots$

اور نتیجہ مثال ۹ سے ثابت ہوتا ہے۔

۱۱۔ سلسلوں کا باہم ضرب دینا۔ فرض کرو کہ دو سلسلے

$س = ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots$، $ت = ب_۰ + ب_۱ لا + ب_۲ لا^۲ + \ldots$

ہیں، انکی سب رقمیں مثبت ہیں اور سلسلے مستدق ہیں جبکہ $لا \leq ر$،

فرض کرو $ص_ن = ا_۰ب_۰ + (ا_۰ب_۱ + ا_۱ب_۰) لا + (ا_۰ب_۲ + ا_۱ب_۱ + ا_۲ب_۰) لا^۲ + \ldots$

$+ (ا_۰ب_{ن-۱} + ا_۱ب_{ن-۲} + \ldots + ا_{ن-۱}ب_۰) لا^{ن-۱}$

جہاں $ص_ن$ کی رقمیں $س_ن$ اور $ت_ن$ کو باہم ضرب دینے سے مرتب کیجاتی ہیں اور $ص_ن$ میں (ن-۱) ویں درجہ سے کوئی اعلیٰ درجہ کی رقم نہیں شریک کیجاتی، ثابت کرو کہ $ص_ن$ کی انتہا س ت ہے یعنی دو سلسلوں کا حاصل ضرب ہے۔

ذرا سا غور کرنے سے ظاہر ہوگا کہ

$$س_ن ت_ن < ص_{۲ن} < س_{ن+۱} ت_{ن+۱}$$

$$س_{ن+۱} ت_{ن+۱} = ص_{۲ن} + ص'_{۲ن}$$

ان لاتساویوں سے ظاہر ہے کہ $ص_{۲ن}$ (با جو وہی بات ہے کہ) $ص_{ن}$ انتہا میں س ت کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

اس کے بعد فرض کرو کہ س اور ت میں ہر دو مثبت اور منفی رقمیں شریک ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ یہ سلسلے مطلق طور پر مستدق ہیں جبکہ $|لا| \leqq ر$

فرض کرو کہ $ص'_{ن}$ کی قیمت $ص'_{۲ن}$ ہے جبکہ تمام رقموں کو مثبت بنا دیا جائے۔

پہلے حصہ کی رو سے جو تمام رقموں کے مثبت ہونے کی صورت میں صادق آتا ہے $ص'_{۲ن}$ کی انتہا صفر ہے، لیکن $ص'_{۲ن}$، $ص'_{۲ن}$ سے بڑا نہیں ہے، اس لئے $ص'_{۲ن}$ کی انتہا صفر ہے۔ اس لئے $ص_{۲ن}$ کی انتہا س ت ہے۔

یہ قاعدہ ناکام رہ سکتا ہے اگر سلسلے صرف شرطاً مستدق ہوں۔

۱۲۔ $ا_۰، ا_۱، ا_۲$ …… کی قیمتیں معلوم کرو جبکہ

$$\frac{جم\, ط + لا}{۱ + ۲\, لا\, جم\, ط + لا^۲} = ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \dots\dots$$

سلسلہ کو مستدق مان کر $۱ + ۲\, لا\, جم\, ط + لا^۲$ سے ضرب دو اور سروں کو مساوی رکھو، اس طرح

$$جم\, ط + لا = ا_۰ + (ا_۱ + ۲ ا_۰\, جم\, ط)\, لا + (ا_۲ + ۲ ا_۱\, جم\, ط + ا_۰)\, لا^۲ + \dots$$

اس لئے $جم\, ط = ا_۰$، $۱ = ا_۱ + ۲ ا_۰\, جم\, ط$، $۰ = ا_۲ + ۲ ا_۱\, جم\, ط + ا_۰$، .....

مساواتوں کو حل کرنے سے

$$ا_۰ = جم\, ط،\ ا_۱ = -جم\, ۲ط،\ ا_۲ = جم\, ۳ط، \dots\ ا_ن = (-۱)^ن\, جم\, (ن+۱)\, ط$$

اور سلسلہ بن جاتا ہے

$$جم\, ط - لا\, جم\, ۲ط + لا^۲\, جم\, ۳ط - لا^۳\, جم\, ۴ط + \dots\dots$$

سلسلہ مستدق ہے جبکہ $|لا| < ۱$

اس لئے توقی سلسلہ کو مستدق ماننا درست تھا۔

۱۳۔ مثال ۱۲ سے یا بلاواسطہ ثابت کرو کہ جب $|\text{لا}| < ۱$ تو

$$\frac{۱ - \text{لا}^۲}{۱ + ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{لا}^۲} = ۱ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ط} + ۲\,\text{لا}^۲\,\text{جم}\,۲\text{ط} - ۲\,\text{لا}^۳\,\text{جم}\,۳\text{ط} + \ldots$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر ط نہ صفر ہو اور نہ ہی یہ ۲π کا ضعف ہو،

تو سلسلہ $\text{جم}\,\text{ط} + \frac{۱}{۲}\text{جم}\,۲\text{ط} + \frac{۱}{۳}\text{جم}\,۳\text{ط} + \ldots$ مستدق ہے۔

$\text{س}_\text{ن}$ کو $۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲}$ کے ساتھ ضرب دو اور ہر حاصل ضرب کو جیبوں کے فرق کے طور پر بیان کرو، ترتیب بدلنے سے حاصل ہوگا

$$۲\,\text{س}_\text{ن}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{۲} = -\text{جب}\frac{\text{ط}}{۲} + \frac{۱}{۲}\text{جب}\frac{۳\text{ط}}{۲} + \frac{۱}{۲\times۳}\text{جب}\frac{۵\text{ط}}{۲} + \ldots + \frac{۱}{\text{ن}(\text{ن}-۱)}\text{جب}\frac{۲\text{ن}-۱}{۲}\text{ط} + \frac{۱}{\text{ن}}\text{جب}\frac{۲\text{ن}+۱}{۲}\text{ط}$$

$$\text{اسلئے}\quad ۲\,\text{س}_\text{ن}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{۲} = -\text{جب}\frac{\text{ط}}{۲} + \frac{۱}{\text{ن}}\text{جب}\frac{۲\text{ن}+۱}{۲}\text{ط} + \left\{\frac{۱}{۲}\text{جب}\frac{۳\text{ط}}{۲} + \ldots + \frac{۱}{(\text{ن}-۱)\text{ن}}\text{جب}\frac{۲\text{ن}+۱}{۲}\text{ط}\right\}$$

لیکن خطوط وحدانی کے اندر جو جملہ ہے اسکی انتہا $\text{ن} \to \infty$ کے لئے محدود ہے

کیونکہ لامتناہی سلسلہ $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + \ldots$ مستدق ہے۔

اسلئے $۲\,\text{س}_\text{ن}\,\text{جب}\frac{\text{ط}}{۲}$ کی انتہا محدود ہے یعنی $\text{س}_\text{ن}$ کی بشرطیکہ $\text{جب}\frac{\text{ط}}{۲}$ صفر نہ ہو۔

۱۵۔ سوال ۱۴ کی سی قیود کے ماتحت ثابت کرو کہ جن سلسلوں کی ن ویں رقمیں

$$\frac{۱}{\text{ن}}\text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}،\quad (-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{۱}{\text{ن}}\text{جم}\,\text{ن}\,\text{ط}،\quad (-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{۱}{\text{ن}}\text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}$$

ہیں وہ مستدق ہیں۔

باب ششم

ٹیلر کا مسئلہ

۴۳ - ٹیلر کا مسئلہ۔ دفعہ ۲۷ حصۂ اول میں ہم نے ذیل کی مساوات حاصل کی۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + (\text{لا} - \text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{1}{2}(\text{لا} - \text{ا})^{2}\,\text{فً}(\text{لا})$$

اور اگرچہ لا کے متعلق جو کچھ ہم جانتے ہیں وہ صرف اتنا کچھ ہے کہ یہ ا اور لا کے درمیان واقع ہوتا ہے تاہم جب (لا - ا) چھوٹا ہو تو تفاعل ف (لا) تقریباً طور پر ذیل کے درجہ دوم کے تفاعل سے تعبیر ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{ا}) + (\text{لا} - \text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{1}{2}(\text{لا} - \text{ا})^{2}\,\text{فً}(\text{ا})$$

جس میں مختلف سر ف (لا)، فَ (لا)، فً (لا) کی قیمتوں پر منحصر ہیں جبکہ لا = ا
یہ ایک عام مسئلہ کی خاص صورت ہے، اب ہم عام مسئلہ پر بحث کرینگے۔
پہلے ہم ف (لا) کے لئے ایک بند جملہ حاصل کرینگے جس میں لا جیسا ایک نامعلوم عدد شریک ہوگا، اس کے بعد تفاعل درجہ دوم کی بجائے ہم ایک قوتی سلسلہ حاصل کرینگے۔ دفعہ ۲۷ حصۂ اول میں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اس کی ذرا سی ترمیم ضروری ہوگی تاکہ رول کا مسئلہ صرف ایک مرتبہ لگانا پڑے۔
فرض کرو کہ ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہیں۔
ایک مقدار ق فرض کرو جسکی تعیین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے۔

$$ف(ب) - \{ف(ا) + (ب-ا)فَ(ا) + \frac{۱}{۲}(ب-ا)^۲ فً(ا) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(ب-ا)^{ن-۱}}{\lfloor ن-۱} ف^{(ن-۱)}(ا)\} = (ب-ا)^ن ق \ldots (۱)$$

رول کے مسئلہ کی رو سے ہم ق کے لئے ایک ایسا جملہ حاصل کر سکتے ہیں جسکو (۱) میں مندرج کرنے سے مطلوبہ عام مسئلہ حاصل ہوگا۔

فرض کرو کہ فا (لا) ایک لا کا تفاعل ہے جس کی تعیین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے۔

$$فا(لا) = ف(ب) - ف(لا) - (ب-لا)فَ(لا) - \frac{۱}{۲}(ب-لا)^۲ فً(لا)$$

$$\ldots - \frac{(ب-لا)^{ن-۱}}{\lfloor ن-۱} ف^{ن-۱}(لا) - (ب-لا)^ن ق \ldots (۲)$$

مساوات (۱) کی رو سے فا (ا) = ۰ نیز فا (ب) = ۰ تطابقاً۔

نیز فا (لا) اور فاَ (لا) دونوں مسلسل ہیں لا = ا سے لا = ب تک کیونکہ ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق حسب مفروضہ مسلسل ہیں۔ اسلئے رول کے مسئلہ کی رو سے فاَ (لا) صفر ہے، لا کی کم از کم ایک قیمت لا کے لئے جو ا اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہے، (۲) کو تفرق کرنے اور تحویل سے

$$فاَ(لا) = -\frac{(ب-لا)^{ن-۱}}{\lfloor ن-۱} ف^ن(لا) + ن(ب-لا)^{ن-۱} ق \ldots (۳)$$

اور چونکہ (ب - لا) صفر نہیں ہے، اس لئے

$$ق = \frac{۱}{\lfloor ن} ف^ن(لا) = \frac{۱}{\lfloor ن} ف^ن\{ا + طہ(ب-ا)\}$$

$$\ldots (۴)$$

جہاں ۰ < طہ < ۱ کیونکہ ا اور ب کے درمیان کا کوئی عدد ا + طہ (ب - ا) سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

(۴) سے ق کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے اسکو (۱) میں مندرج کرو اور ارقام ف (ا)، (ب - ا) فَ (ا)، ...... کو مساوات کی دوسری

جانب لے جاؤ، اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{ف}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ا}) + (\text{ب}-\text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{2}}{\lfloor 2}\,\text{فً}(\text{ا}) + \dots$$

$$\dots + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}-1}}{\lfloor \text{ن}-1}\,\text{ف}^{\text{ن}-1}(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}}\,\text{ف}^{\text{ن}}\{\text{ا} + \text{طہ}(\text{ب}-\text{ا})\}$$

(۵) ....

اب ہم ب کی بجائے لا استعمال کرسکتے ہیں۔ (ا) میں ب کو ہم نے صرف اس لئے استعمال کیا ہے کہ اوسط قیمت کا مسئلہ لگانے میں التباس پیدا نہو۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + (\text{لا}-\text{ا})\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{2}}{\lfloor 2}\,\text{فً}(\text{ا}) + \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{3}}{\lfloor 3}\,\text{ف}'''(\text{ا}) + \dots$$

$$\dots + \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}-1}}{\lfloor \text{ن}-1}\,\text{ف}^{(\text{ن}-1)}(\text{ا}) + \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}\{\text{ا} + \text{طہ}(\text{لا}-\text{ا})\}$$

(۶) ....

مساوات (۶) کا مسئلہ ٹیلر کے مسئلہ سے موسوم ہوتا ہے، اسکی خاص صورت جبکہ ا = ۰ حسب ذیل ہے۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(0) + \text{لا}\,\text{فَ}(0) + \frac{\text{لا}^{2}}{\lfloor 2}\,\text{فً}(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\lfloor \text{ن}-1}\,\text{ف}^{\text{ن}-1}(0) + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}}\,\text{ف}^{\text{ن}}(\text{طہ}\,\text{لا})$$

(۷) ....

اسے میکلارن کا مسئلہ کہتے ہیں۔

جن شرائط کے ماتحت ٹیلر کا مسئلہ ثابت کیا گیا ہے وہ یہ ہیں، ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق مسلسل (اور اس لئے محدود) ہیں لا = ا سے لا کی اس قیمت تک جس کے لئے ف (لا) کی قیمت محسوب کی جاتی ہے۔ عدد طہ کے لئے صرف یہی کہا جا سکتا ہے کہ یہ ایک مثبت کسر واجب ہے۔

عام طور پر اسکی قیمت ن اور لا کی مختلف قیمتوں کے لئے مختلف ہوگی۔

ٹیلر کے مسئلہ میں باقی مساوات (۶) میں پہلی ن رقموں کے مجموعہ کو سن (لا) سے تعبیر کرو اور آخری رقم کو بن (لا) سے۔ اس طرح

ف (لا) = سن (لا) + بن (لا) اور

$$ب_ن (لا) = \frac{(لا - ا)^ن}{\lfloor ن} ف^ن \{ ا + طہ (لا - ا) \} \ldots\ldots (۸)$$

اگر ہم ن کو لا انتہا بڑھا دیں تو (۶) کے بائیں جانب کا مجموعہ ایک لا متناہی سلسلہ ہو جاتا ہے اور اگر بن (لا) صفر ہو تو یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق حسب مفروض مسلسل ہیں اور ہر مشتق کو مسلسل رہنا چاہیے تاکہ ہم ن کو لا انتہا فرض کر سکیں۔ اس لئے

مسئلہ۔ اگر ف (لا) اور اس کے سب مشتق سعت زیر بحث میں مسلسل ہوں اور اگر بن (لا) کی انتہا صفر ہو تو لا متناہی سلسلہ

$$ف (ا) + (لا - ا) فَ (ا) + \frac{(لا - ا)^۲}{\lfloor ۲} فً (ا) + \ldots\ldots (۹)$$

جو (۶) میں ن کو لا متناہی فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہوگا اور تفاعل ف (لا) کو تعبیر کرے گا یعنی یہ سلسلہ ف (لا) کی جانب مستدق ہوگا۔

[نوٹ ایسی صورتیں مرتب ہو سکتی ہیں جن میں (۹) مستدق ہو لیکن قیمت ف (لا) کی جانب مستدق نہ ہو، لیکن عام عملی حالات میں ایسی صورتیں واقع نہیں ہونگی]

سلسلہ (۹) کو ف (لا) کے لئے **ٹیلر کا سلسلہ** کہتے ہیں جب (۶) اور (۹) میں تمیز کرنا مقصود ہو تو (۶) کو ٹیلر کے ضابطہ سے ہم موسوم کرینگے۔ ظاہر ہے کہ اوپر جو کچھ ٹیلر کے سلسلہ کے متعلق ذکر کیا گیا ہے وہ سب کچھ اس کی خاص صورت مکلارن کے سلسلہ

$$ف (۰) + لا فَ (۰) + \frac{لا^۲}{\lfloor ۲} فً (۰) + \ldots\ldots (۱۰)$$

یہ ری مساوات آتا ہے۔

(۹) میں $\text{ح}_{\text{ن}}(\text{لا})$ کی جو قیمت درج ہے وہ ٹیلر کے سلسلہ میں لنگرانج کی صورت باقی کہلاتی ہے۔ باقی کی ایک اور مفید صورت مساوات (۱) میں $(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}}\ \text{ق}$ کی بجائے $(\text{ب}-\text{ا})\ \text{ق}$ رکھنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔ ایسا کرنے سے مساوات (۳) کی آخری رقم محض ق رہ جاتی ہے اور $(\text{ب}-\text{ا})\ \text{ق}$ کی بجائے

$$\frac{(\text{ب}-\text{ا})(\text{ب}-\text{لا})^{\text{ن}-1}}{\lfloor\text{ن}-1}\ \text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا})\ \text{یعنی}\ \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}}(1-\text{ط})^{\text{ن}-1}}{\lfloor\text{ن}-1}\ \text{ف}^{\text{ن}}\{\text{ا}+\text{ط}(\text{ب}-\text{ا})\}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اسلئے

$$\text{ح}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}(1-\text{ط})^{\text{ن}-1}}{\lfloor\text{ن}-1}\ \text{ف}^{(\text{ن})}\{\text{ا}+\text{ط}(\text{لا}-\text{ا})\} \quad (11)$$

یہ کوشی کی صورت باقی ہے۔

اگر ہم (۱) میں $(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}}\ \text{ق}$ کی بجائے $(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ع}}\ \text{ق}$ رکھیں تو

$$\text{ح}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}(1-\text{ط})^{\text{ن}-\text{ع}}}{\text{ع}\lfloor\text{ن}-1}\ \text{ف}^{\text{ن}}\{\text{ا}+\text{ط}(\text{لا}-\text{ا})\} \quad \ldots\ldots(12)$$

یہ شلوملش روش کی صورت باقی ہے۔ اس میں $\text{ع}=\text{ن}$ رکھنے سے لنگرانج کی اور $\text{ع}=1$ رکھنے سے کوشی کی صورت باقی حاصل ہوتی ہے۔

(۵) میں ا کی بجائے لا اور ب کی بجائے لا + ھ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{ف}(\text{لا}) + \text{ھ}\,\text{ف}'(\text{لا}) + \frac{\text{ھ}^2}{\lfloor 2}\,\text{ف}''(\text{لا}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}+\text{ط}\,\text{ھ}) \quad \ldots\ldots(13)$$

$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ})$ کی یہ قیمت اکثر استعمال ہوتی ہے۔

اب ہم ان مسائل کو تفاعلوں کے پھیلانے میں استعمال کرینگے، بالعموم مکلارن کے

مسئلہ سے کام لینا پڑیگا اور باقی کی دو ذیل کی صورتیں استعمال میں آئینگی۔

$$\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{طہ لا})\text{،}\quad \text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{\text{ن}}(1-\text{طہ})^{\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}-1}}\,\text{ف}^{\text{ن}}(\text{طہ لا})$$

پہلی لنگرانج کی شکل ہے اور دوسری کوشی کی۔

۴۴ - (۱) جب لا

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{جب لا}\text{،}\ \text{ف}'(\text{لا}) = \text{جم لا}\text{،}\ \text{ف}''(\text{لا}) = -\text{جب لا}\text{،}\ \text{ف}'''(\text{لا}) = -\text{جم لا}$$

$$\text{ف}^{(4)}(\text{لا}) = \text{جب لا}\text{،}\quad \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن}\pi}{2}\right)$$

اسلئے $\text{ف}(0) = 0$، $\text{ف}'(0) = 1$، $\text{ف}''(0) = 0$، $\text{ف}'''(0) = -1$

$$\text{ف}^{(4)}(0) = 0\text{،}\quad \text{ف}^{(\text{ن})}(0) = \text{جب}\frac{\text{ن}\pi}{2}\text{،}\quad \text{ف}^{\text{ن}}(\text{طہ لا}) = \text{جب}\left(\text{طہ لا} + \frac{\text{ن}\pi}{2}\right)$$

چونکہ جب $\left(\frac{\text{ن}\pi}{2}\right)$ صفر ہے یا ± 1 بموجب اسکے کہ ن جفت ہے یا طاق اس لئے لا کی جفت قوتوں کے سر صفر ہونگے اور پھیلاؤ میں صرف لا کی طاق قوتیں شریک ہونگی اور رقمیں متبادلاً مثبت اور منفی ہونگی - پس

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{لا}^5}{\underline{|5}} - \frac{\text{لا}^7}{\underline{|7}} + \dots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{جب}\left(\text{طہ لا} + \frac{\text{ن}\pi}{2}\right)$$

نیز $\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{جب}\left(\text{طہ لا} + \frac{\text{ن}\pi}{2}\right)$ جو تعداداً $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}$ سے بڑا نہیں ہے اور $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}$ کی انتہا صفر ہے - پس ہمیں ذیل کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{لا}^5}{\underline{|5}} - \frac{\text{لا}^7}{\underline{|7}} + \dots\dots$$

جو لا کی ہر محدود قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہے -

(۲) جم لا - اسی طرح سے

$$\text{جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲!} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۴!} - \frac{\text{لا}^{۶}}{۶!} + \cdots\cdots$$

اور سلسلہ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہے۔

(۳) $\text{تو}^{\text{لا}}$ — $\text{ف}(\text{لا}) = \text{تو}^{\text{لا}}$ ، $\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \text{تو}^{\text{لا}}$

$\text{ف}(۰) = ۱$ ، $\text{ف}^{(\text{ن})}(۰) = ۱$ ، ن کی ہر قیمت کے لئے

اسلئے
$$\text{تو}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲!} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳!} + \cdots\cdots$$

اور سلسلہ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے مطلق طور پر مستدق ہے۔

(۴) $(۱ + \text{لا})^{\text{م}}$

$$\text{ف}(\text{لا}) = (۱+\text{لا})^{\text{م}} ،\ \text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا}) = \text{م}(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)(۱+\text{لا})^{\text{م}-\text{ن}}$$

$$\text{ف}(۰) = ۱ ،\ \text{ف}^{\text{ن}}(۰) = \text{م}(\text{م}-۱)\ldots\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)$$

$$\text{ف}^{\text{ن}}(\text{ط لا}) = \text{م}(\text{م}-۱)\ldots\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)(۱+\text{ط لا})^{\text{م}-\text{ن}}$$

اسلئے
$$(۱+\text{لا})^{\text{م}} = ۱ + \text{م لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{۱\times۲}\text{لا}^{۲} + \ldots + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۲)}{(\text{ن}-۱)!}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{حب}_{\text{ن}}(\text{لا})$$

م مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلہ (م + ۱) ویں رقم پر ختم ہو جاتا ہے کیونکہ $\text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا}) = ۰$ جبکہ $\text{ن} > \text{م}$ ، اگر م مثبت صحیح عدد نہ ہو تو ہمیں $\text{حب}_{\text{ن}}(\text{لا})$ پر غور کرنا ہوگا۔ ہم کوشی کی شکل لینگے

$$\text{حب}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \frac{\text{م}(\text{م}-۱)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)}{(\text{ن}-۱)!}\text{لا}^{\text{ن}}(۱-\text{ط})^{\text{ن}-۱}(۱+\text{ط لا})^{\text{م}-\text{ن}}$$

لامتناہی سلسلہ
$$۱ + \text{م لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{۱\times۲}\text{لا}^{۲} + \cdots\cdots$$

مطلق طور پر مستدق ہوتا ہے اگر $|\text{لا}| < ۱$ اور متسع ہوتا ہے اگر $|\text{لا}| > ۱$

(مشق ۱۲ سوال ۴)، اسلئے ہم لا کی صرف ان قیمتوں پر غور کرینگے جن کے لئے
|لا| ≦ ۱

(ا) |لا| < ۱، $ب_ن$ (لا) کو تین اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی لکھو

$$\text{م لا}\,(۱+\text{طہ لا})^{\text{م}-۱}\text{،}\quad \left(\frac{۱-\text{طہ}}{۱+\text{طہ لا}}\right)^{\text{ن}-۱}\text{،}\quad \frac{(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)}{\underline{|\text{ن}-۱}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}$$

پہلا جزوِ ضربی ن کی ہر قیمت کے لئے محدود ہے کیونکہ $(۱+\text{طہ لا})^{\text{م}-۱}$، ۱ اور $(۱+\text{لا})^{\text{م}-۱}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے، دوسرا جزو ضربی ایک سے تجاوز نہیں ہوسکتا، تیسرے جزو ضربی کی انتہا صفر ہے کیونکہ یہ مستدق سلسلہ

$$۱+(\text{م}-۱)\,\text{لا}+\frac{(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)}{۱\times۲}\,\text{لا}^۲+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

کی نویں رقم ہے۔ اسلئے $ب_ن$ (لا) صفر ہے اور م کی تمام قیمتوں کے لئے جبتک کہ $-۱ < \text{لا} < ۱$ یہ لامتناہی سلسلہ $(۱+\text{لا})^{\text{م}}$ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

(ب) لا = ± ۱، یہ صورتیں ایسی ضروری نہیں اور $ب_ن$ (لا) کی تحقیق طولانی ہے، اس جگہ صرف ہم نتائج کا حوالہ دینگے، ثبوت کے لئے ملاحظہ ہو کرسٹل کا الجبرا، حصۂ دوم، باب ۲۶ دفعہ ۶۔

لا = + ۱، سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہے اگر م > ۰ اور مستدق بالشرط ہے اگر ۰ > م > -۱، سلسلہ اہتزازی ہے اگر م = -۱ اور متسع اگر م < -۱

لا = -۱، سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوتا ہے اگر م > ۰ اور متسع ہوتا ہے اگر م < ۰

اگر ا ≠ ب تو جملہ ثنائی $(\text{ا}+\text{ب})^{\text{م}}$ کو لکھو ایسے $\text{ا}^{\text{م}}\left(۱+\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)^{\text{م}}$ یا $\text{ب}^{\text{م}}\left(۱+\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}}$ اور پھر $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کی بجائے لا لکھو اگر ب کم ہو تعداداً ا سے یا $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ کی بجائے لا لکھو اگر ا کم ہو

ب سے ۔

(۵) **لوک (۱+لا)** ۔۔ لوک لا کو مکلارن کے مسئلہ کے ذریعہ پھیلانا ممکن نہیں کیونکہ لوک لا لامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۰ ۔ لیکن ہم لوک لا کو ٹیلر کے مسئلہ کی مدد سے (لا − ر) کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں اگر ر مثبت ہو۔ لوک (۱+لا) کو پھیلانا آسان ہے۔

$$ف(لا) = لوک(۱+لا)،\quad ف'(لا) = \frac{۱}{۱+لا}،\quad ف^{(ن)}(لا) = \frac{(-۱)^{ن-۱}\,|\underline{ن-۱}}{(۱+لا)^{ن}}$$

$$ف(۰) = ۰،\quad ف'(۰) = ۱،\quad ف^{(ن)}(۰) = (-۱)^{ن-۱}\,|\underline{ن-۱}$$

$$لوک(۱+لا) = لا - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳} - \frac{لا^{۴}}{۴} + \ldots + ب_{ن}(لا)$$

لامتناہی سلسلہ متسع ہے اگر $|لا| > ۱$ اور اگر $لا = -۱$

اسلئے ہم باقی پر اس صورت میں غور کرتے ہیں جبکہ $-۱ < لا \leq ۱$
اگر لا مثبت ہو تو لگرانج کی صورت باقی یہ ہے

$$ب_{ن}(لا) = (-۱)^{ن-۱}\,\frac{۱}{ن}\left(\frac{لا}{۱+طہ\,لا}\right)^{ن}$$

اسکی انتہا صفر ہے کیونکہ $\left(\frac{لا}{۱+طہ\,لا}\right)^{ن}$ کبھی ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا اور $\frac{۱}{ن}$ کی انتہا صفر ہے۔
اگر لا منفی ہو تو **کوشی** کی صورت

$$ب_{ن}(لا) = (-۱)^{ن-۱}\,لا^{ن} \times \frac{۱}{۱+طہ\,لا}\left(\frac{۱-طہ}{۱+طہ\,لا}\right)^{ن-۱}$$

جس سے ظاہر ہے کہ اگر $|لا| < ۱$ تو انتہا صفر ہوگی کیونکہ $لا^{ن}$ کی انتہا صفر ہے
اور ن کی ہر قیمت کے لئے دوسرے اجزائے ضربی محدود ہیں۔

اس لئے $\text{لوک}(1+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \ldots\ldots$

جہاں $-1 < \text{لا} \leq 1$، یہ سلسلہ بالشرط ستدق ہے جبکہ $\text{لا} = 1$ واضح ہو کہ $\text{لا} = 1$ رکھنے سے

$$\text{لوک}\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$$

(۶) لوکارتم محسوب کرنا۔ اوپر جو سلسلہ معلوم کیا گیا ہے وہ سرعت سے ستدق نہیں ہوتا اس لئے حسابات کی غرض سے چنداں موزوں نہیں۔

$$\text{لوک}(1+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \ldots\ldots \quad (1)$$

لا کی بجائے -لا لکھنے سے

$$\text{لوک}(1-\text{لا}) = -\text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} - \ldots\ldots \quad (2)$$

چونکہ $\text{لوک}(1+\text{لا}) - \text{لوک}(1-\text{لا}) = \text{لوک}\ \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}}$

اس لئے تفریق سے

$$\text{لوک}\ \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} = 2\left\{\text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} + \ldots + \frac{\text{لا}^{2ن-1}}{2ن-1} + \ldots\right\} \quad (3)$$

فرض کرو کہ لا مثبت ہے اور $\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} = \frac{\text{ما}+1}{\text{ما}}$ جس سے $\text{لا} = \frac{1}{2\text{ما}+1} < 1$

مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$\text{لوک}(\text{ما}+1) = \text{لوک}\ \text{ما} + 2\left\{\frac{1}{2\text{ما}+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\text{ما}+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\text{ما}+1}\right)^5 + \ldots\right\}$$
$$\ldots\ldots \quad (4)$$

اس سے لوک (ما + ۱) معلوم ہو سکتا ہے اگر لوک ما معلوم ہو۔ یاد رہے کہ (۴)، ما میں ایک قوتی سلسلہ نہیں ہے۔

مفرد اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ... کے لوکارتم بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں مثلاً

$$ما = لوک ۲ = ۲ \left\{ \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳ \times ۳^۳} + \frac{۱}{۵ \times ۳^۵} + \ldots \right\}$$

$$ما = ۲، لوک ۳ = لوک ۲ + ۲ \left\{ \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳ \times ۵^۳} + \frac{۱}{۵ \times ۵^۵} + \ldots \right\}$$

اب لوک ۴ = ۲ لوک ۲، لوک ۵، ما کی بجائے ۴ لکھنے سے حاصل ہوگا اور لوک ۶ = لوک ۲ + لوک ۳ وغیرہ۔ سلسلہ (۴) سرعت سے مستدق ہوتا ہے ما = ۲ کی صورت میں بھی۔ خاص اعداد کے لئے خاص ترکیبیں استعمال ہو سکتی ہیں۔ مثلاً اگر ما = ۹۴ تو مساوات (۴) سے لوک کے معلوم ہوگا لوک ۲ اور لوک ۵ کی رقوم میں اور سلسلہ بڑی سرعت سے مستدق ہوگا۔

طالب علم مزید معلومات اور حوالہ کی غرض سے کرسٹل کا جبر و مقابلہ حصہ دوم، باب ۲۸، دفعہ ۱۱ دیکھے۔

(۷) دائرہ کی قوس کے طول کے متعلق ہائی گن کا قاعدہ۔

اگر کل قوس کے وتر کا طول ا ہو اور نصف قوس کا وتر ب ہو تو قوس کا طول (ل) تقریباً $\frac{۸ ب - ا}{۳}$ ہوگا۔

فرض کرو کہ قوس کے سامنے دائرہ کے مرکز پر زاویہ طہ نیم قطری بنتا ہے اور دائرہ کا نصف قطر ر ہے۔ تب ل = ر طہ اور

$$ا = ۲ ر جب \frac{طہ}{۲} = ۲ ر \left\{ \frac{طہ}{۲} - \frac{۱}{۶} \left(\frac{طہ}{۲}\right)^۳ + \frac{۱}{۱۲۰} \left(\frac{۱}{۲} طہ\right)^۵ - \ldots \right\}$$

..........(۱)

$$ب = ۲ ر جب \frac{طہ}{۴} = ۲ ر \left\{ \frac{طہ}{۴} - \frac{۱}{۶} \left(\frac{طہ}{۴}\right)^۳ + \frac{۱}{۱۲۰} \left(\frac{طہ}{۴}\right)^۵ - \ldots \right\}$$

..........(۲)

(۲) کو ۸ سے ضرب دو اور (۱) کو تفریق کرو، اس طرح طہ^۳ والی رقم ساقط

ہو جائے گی۔

اس لئے $8\,ب - ا = 2\,ر\left\{\frac{3}{2}\,طہ - \frac{3\,طہ^{5}}{2\times 120} + \ldots\right\}$

$= 3\,ل\left\{1 - \frac{طہ^{4}}{480} + \ldots\right\}$

اس لئے $طہ^{4}$ اور اس سے اعلےٰ قوتوں کو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$ل = \frac{8\,ب - ا}{3}$

یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ۳۰° کے زاویہ کی صورت میں اضافی غلطی $\frac{1}{100000}$ سے کم ہے

اور ۴۵° " " " " $\frac{1}{20000}$ " "

اور ۶۰° " " " " $\frac{1}{6000}$ " "

۴۵۔ ن ویں مشتق کا محسوب کرنا۔

مکلارن کے سلسلہ کی مدد سے کسی تفاعل کے لئے قوتی سلسلہ معلوم کرنے میں جو عملی مشکل پیش آتی ہے وہ $ف^{(ن)}(لا)$ کا نکالنا ہے۔ مذکورہ بالا صورتوں کے علاوہ بہت کم صورتیں ایسی ہیں جن میں ن واں مشتق زیادہ بے قابو شکل اختیار نہیں کرتا۔ باقی $ب_ن(لا)$ کی بحث ناممکن ہے جب تک کہ $ف^{(ن)}(لا)$ معلوم نہ ہو جائے۔ بعض خاص صورتوں میں $ف^{(ن)}(0)$ معلوم ہو سکتا ہے اور مکلارن کا لامتناہی سلسلہ اگر یہ مستدق ہو تو (بالعموم) وقفہ استدقاق کے اندر $ف(لا)$ کو تعبیر کرتا ہے۔

اس تعلق میں لیبنٹز کا مسئلہ (دفعہ ۸، حصۂ اول) نہایت کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

بطور مثال کے $ف(لا) = جب(ا جب^{-1} لا)$ پر غور کرو۔
اس صورت میں $ف^{(ن)}(لا)$ کو بلاواسطہ معلوم کرنا مشکل ہوگا اسلئے ہم

پہلے فَ (لا) اور فً (لا) معلوم کرکے ایک تفرقی مساوات بنانے ہیں، جس پر لیب نیٹز کا مسئلہ لگ سکیگا، اس طرح $\text{ف}^{\text{ن}}(\text{۰})$ کی قیمت معلوم ہو جائیگی۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{جب}(\text{ا جب}^{-1}\text{لا})$$

$$\text{فَ}(\text{لا}) = \text{ا جم}(\text{ا جب}^{-1}\text{لا}) \times \frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{فً}(\text{لا}) = -\text{ا}^2\,\text{جب}(\text{ا جب}^{-1}\text{لا}) \times \frac{1}{(1-\text{لا}^2)} + \text{ا جم}(\text{ا جب}^{-1}\text{لا})\frac{\text{لا}}{(1-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\text{ا}^2\,\text{ف}(\text{لا})\frac{1}{(1-\text{لا}^2)} + \frac{\text{لا فَ}(\text{لا})}{1-\text{لا}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

اس لئے $(1-\text{لا}^2)\,\text{فً}(\text{لا}) - \text{لا فَ}(\text{لا}) + \text{ا}^2\,\text{ف}(\text{لا}) = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

ف (لا)، فَ (لا)، فً (لا) میں لا کو صفر بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ف}(0) = 0،\ \text{فَ}(0) = \text{ا}،\ \text{فً}(0) = 0$$

(۳) کی رو سے دائیں جانب کا تفاعل ہمیشہ صفر ہوتا ہے، اس لئے اس کا ن واں مشتق بھی صفر ہوگا۔ یہ تفاعل حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے، اسلئے اسکی ہر رقم لیب نیٹز کا مسئلہ لگانے سے ن دفعہ تفرق ہو سکتی ہے۔
پہلی رقم کے لئے فرض کرو کہ

فً (لا) = ع، $(1-\text{لا}^2) = \text{و}$، دوسرے سے اعلی و کا ہر مشتق صفر ہے، فً (لا) کا ن واں مشتق $\text{ف}^{\text{ن}+2}(\text{لا})$ ہے، (ن-۱) واں $\text{ف}^{\text{ن}+1}(\text{لا})$ وغیرہ، پس

$$\text{عف}^{\text{ن}}\{(1-\text{لا}^2)\,\text{فً}(\text{لا})\} = (1-\text{لا}^2)\,\text{ف}^{(\text{ن}+1)}(\text{لا}) + \text{ج}^{\text{ن}}_{1}(-2\,\text{لا})\,\text{ف}^{(\text{ن}+1)}(\text{لا})$$

$$+\ \text{ج}^{\text{ن}}_{2}(-2)\,\text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا})$$

اسی طرح $\text{عف}^{\text{ن}}\{\text{لا فَ}(\text{لا})\} = \text{لا ف}^{(\text{ن}+1)}(\text{لا}) + \text{ن ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})$

نیز۔ $\text{عف}^{\text{ن}}\{\text{ل}^2\,\text{ف}(\text{لا})\} = \text{ل}^2\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})$

جمع کرنے سے تھوڑی تحویل کے بعد حاصل ہوگا

$$(1-\text{لا}^2)\,\text{ف}^{(\text{ن}+2)}(\text{لا}) - (2\text{ن}+1)\,\text{لا}\,\text{ف}^{(\text{ن}+1)}(\text{لا}) - (\text{ن}^2-\text{ل}^2)\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

اس لئے جب، $\text{لا} = 0$ تو

$$\text{ف}^{(\text{ن}+2)}(0) = (\text{ن}^2-\text{ل}^2)\,\text{ف}^{(\text{ن})}(0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

مساوات (۵) سے سب مشتق دوسرے سے اعلیٰ رتبہ کے $\text{لا} = 0$ کے لئے معلوم ہوسکتے ہیں کیونکہ پہلے دو معلوم ہیں

$$\text{ف}^{(4)}(0) = (2^2-\text{ل}^2)\,\text{ف}''(0) = 0$$

$\text{ف}^{(6)}(0) = (4^2-\text{ل}^2)\,\text{ف}^{(4)}(0) = 0$، وغیرہ، پس ہر جفت مشتق صفر ہے۔ نیز

$$\text{ف}^{(3)}(0) = (1^2-\text{ل}^2)\,\text{ف}'(0) = (1^2-\text{ل}^2)\,\text{ل}$$

$$\text{ف}^{(5)}(0) = (3^2-\text{ل}^2)\,\text{ف}^{(3)}(0) = (3^2-\text{ل}^2)(1^2-\text{ل}^2)\,\text{ل}$$

اور اسی طرح سے عام قیمت یہ ہے

$$\text{ف}^{(2\text{ن}-1)}(0) = \text{ل}(1^2-\text{ل}^2)(3^2-\text{ل}^2)\ldots\ldots\{(2\text{ن}-3)^2-\text{ل}^2\}$$ اسلئے

$$\text{جب}(\text{ل}\,\text{جب}^{-1}\text{لا}) = \text{ل}\,\text{لا} + \frac{\text{ل}(1^2-\text{ل}^2)}{\lfloor 3}\,\text{لا}^3 + \frac{\text{ل}(1^2-\text{ل}^2)(3^2-\text{ل}^2)}{\lfloor 5}\,\text{لا}^5 + \ldots (6)$$

یہ سلسلہ متناہی ہوگا اگر ل طاق عدد ہو، باقی سب صورتوں میں یہ لامتناہی ہوگا۔ $\text{لا}^{2\text{ن}+1}$ والی رقم کی نسبت رقم ما قبل کے ساتھ $\frac{(2\text{ن}-1)^2-\text{ل}^2}{2\text{ن}(2\text{ن}+1)}\,\text{لا}^2$ ہے اور چونکہ اس نسبت کی انتہا لا^2 ہے، اسلئے سلسلہ (۶) مطلق طور پر مستدق ہے

جب تک کہ $-1 < لا < +1$

بعض مقاصد کے لحاظ سے پھیلاؤ کی چند قیمیں معلوم کرنا کافی ہوتا ہے اور تھوڑی بہت محنت کے ساتھ چند مشتقوں کا نکال لینا دشوار نہیں ہوتا۔ مثلاً لوک (۱+ جب لا) کے پہلے تین، چار مشتق بآسانی محسوب ہو سکتے ہیں اور پھیلاؤ کی پہلی تین قیمیں حاصل ہوتی ہیں $لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{6}$

لیکن ایسی صورتوں میں اس طرح کا عمل زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

$$ما = ا_1 لا + ا_2 لا^2 + \ldots \quad ، \quad ف(ما) = ب + ب_1 ما + ب_2 ما^2 + \ldots\ldots$$

سلسلہ ب + ب₁ ما + ب₂ ما² + ... میں ما کی بجائے پہلا سلسلہ مندرج کرو اور لا کی قوتوں میں اسے ترتیب دو۔ لا کی کافی طور پر چھوٹی قیمتوں کے لئے سلسلہ متصلاً مستدق ہوگا۔ مثلاً

$$ما = جب\, لا = لا - \frac{لا^3}{6} + \ldots\ldots\ldots$$

$$لوک\,(1 + ما) = ما - \frac{ما^2}{2} + \frac{ما^3}{3} + \ldots\ldots \text{ اس لئے}$$

$$لوک\,(1 + جب\, لا) = (لا - \frac{لا^3}{6} + \ldots) - \frac{1}{2}(لا - \frac{لا^3}{6} + \ldots)^2 + \frac{1}{3}(لا - \frac{لا^3}{6} + \ldots)^3 \ldots$$

$$= لا - \frac{1}{2} لا^2 + \frac{1}{6} لا^3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

اس طریقہ کا ثبوت یہاں نہیں دیا جا سکتا۔

۳۶۔ سلسلوں کا تفرق اور تکمل۔ بعض اوقات کسی تفاعل کی غیر محدود تعبیر، جس لامتناہی سلسلہ کو استعمال کرنے سے جو تفاعل کو تعبیر کرتا ہے

بآسانی تحقیق ہو سکتی ہیں، اس لئے ہمیں دیکھنا چاہئے کہ کن شرائط کے ماتحت ایک لامتناہی سلسلہ رقم بر رقم تفرق یا تکمل ہو سکتا ہے۔ ہمیں یاد ہے کہ کسی مجموعہ کو تفرق یا تکمل کرنے کے قواعد صرف اس صورت میں ثابت کئے گئے تھے جبکہ رقموں کی تعداد **محدود** ہو، لامتناہی سلسلوں کی صورت میں اسکی توسیع کا جواز مزید تصدیق کا محتاج ہے۔

تکمل سے متعلق ایک مسئلہ سے ہم شروع کرینگے، حسب معمول ص سے ایک چھوٹی اختیاری مثبت مقدار مراد ہے۔

مسئلہ ۱۔ اگر سلسلہ $\text{ع}_1(\text{لا}) + \text{ع}_2(\text{لا}) + \dots$ $\text{لا} = \text{ا}$ سے $\text{لا} = \text{ب}$ تک یکساں طور پر مستدق ہو اور $\text{ف}(\text{لا})$ کی جانب استدقاق کرے تو سلسلہ

$$\int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ع}_1(\text{لا})\, \text{د لا} + \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ع}_2(\text{لا})\, \text{د لا} + \dots\dots$$

جہاں $\text{ا} \leq \text{ج} \leq \text{لا} \leq \text{ب}$ بھی مستدق ہوگا اور قیمت

$$\int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ف}(\text{لا})\, \text{د لا}$$

کی طرف مائل ہوگا۔

فرض کرو کہ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{س}_\text{ن}(\text{لا}) + \text{ح}_\text{ن}(\text{لا})$ اور فرض کرو کہ

$$\text{ل}_\text{ن}(\text{لا}) = \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{س}_\text{ن}(\text{لا})\, \text{د لا}،\quad \text{ص}_\text{ن}(\text{لا}) = \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ح}_\text{ن}(\text{لا})\, \text{د لا}$$

تب

$$\text{ل}_\text{ن}(\text{لا}) = \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ع}_1(\text{لا})\, \text{د لا} + \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ع}_2(\text{لا})\, \text{د لا} + \dots + \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ع}_\text{ن}(\text{لا})\, \text{د لا}$$

اور

$$\int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ف}(\text{لا})\, \text{د لا} = \text{ل}_\text{ن}(\text{لا}) + \text{ص}_\text{ن}(\text{لا})$$

اب چونکہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہے ہم م کی قیمت ایسی منتخب کر سکتے ہیں کہ

جب ن ≥ م تو باقی حبن (لا)، ا اور ب کے درمیان لا کی ہر قیمت کے لئے صہ سے کم ہو، اس لئے اگر م کی یہ قیمت منتخب کرلی جائے تو ن ≥ م کے لئے مقدار میا (لا) تعداداً کم ہوگی $\int_{ج}^{لا}$ صہ فرلا سے یعنی صہ (لا - ج) سے، اسلئے اگر ن ≥ م تو فرق

$$\int_{ج}^{لا} ف (لا) فرلا - لمن (لا)$$

تعداداً کم ہوگا صہ (لا - ج) سے اور اس فرق کی انتہا ن ← ∞ کے لئے صفر ہے۔

اسلئے $\int_{ج}^{لا}$ ف (لا) فرلا = نہا$_{ن \leftarrow \infty}$ لمن (لا) = $\int_{ج}^{لا}$ ع۱ (لا) فرلا + $\int_{ج}^{لا}$ ع۲ (لا) فرلا + ...

مسئلہ ۲۔ اگر سلسلہ ع۱ (لا) + ع۲ (لا) + ... مستدق ہو اور ف (لا) کی طرف مائل ہو جبکہ ا ≥ لا ≥ ب تو ف (لا) کا مشتق اوپر کے سلسلہ کو رقم برقم تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی

ف′ (لا) = ع′۱ (لا) + ع′۲ (لا) + ...

بشرطیکہ سلسلہ ع′۱ (لا) + ع′۲ (لا) + ...، لا = ا سے لا = ب تک **یکساں طور** پر مستدق ہو۔

فرض کرو کہ فا (لا) = ع′۱ (لا) + ع′۲ (لا) + ع′۳ (لا) + ...

تب چونکہ ع′۱ (لا) + ع′۲ (لا) + ع′۳ (لا) + ... یکساں طور پر مستدق ہے،

اس لئے مسئلہ (۱) کی رو سے

$$\int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{ولا} = \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ع}_{۱}(\text{لا})\,\text{ولا} + \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{ع}_{۲}(\text{لا})\,\text{ولا} + \ldots\ldots$$

$$= \{\text{ع}_{۱}(\text{لا}) - \text{ع}_{۱}(\text{ج})\} + \{\text{ع}_{۲}(\text{لا}) - \text{ع}_{۲}(\text{ج})\} + \ldots\ldots$$

$$= \text{ع}_{۱}(\text{لا}) + \text{ع}_{۲}(\text{لا}) + \ldots\ldots - \{\text{ع}_{۱}(\text{ج}) + \text{ع}_{۲}(\text{ج}) + \ldots\ldots\}$$

$$= \text{ف}(\text{لا}) - \text{مستقل}$$

اس لئے $\frac{\text{و}}{\text{ولا}} \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{ولا} = \text{ف}'(\text{لا})$ یعنی $\text{فا}(\text{لا}) = \text{ف}'(\text{لا})$

دفعہ ۴۲ مسئلہ ۲ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک قوتی سلسلہ کو رقم بر رقم تکمل کیا جاسکتا ہے اگر لا دفعہ استدقاق کے اندر واقع ہو۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ جو سلسلہ قوتی سلسلہ کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے وہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے جبکہ دفعہ ۴۲ مسئلہ ۲ کی ترقیم کے مطابق $-\text{ر} < \text{ا} \leq \text{لا} \leq \text{ب} < \text{ر}$، اور اس سلسلے کا مشتق اس لئے اسکو رقم بر رقم تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ کیونکہ سلسلہ $\sum \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{د}^{\text{ن}}$ مطلق طور پر مستدق ہے اور اسلئے $|\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{د}^{\text{ن}}|$ ہر ن کے لئے محدود ہے یعنی (فرض کرو کہ) ج سے کم ہے۔

سلسلہ کے تفرق سے یہ سلسلہ حاصل ہوگا

$$\text{ا}_{۱} + ۲\text{ا}_{۲}\,\text{لا} + ۳\text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{۲} + \ldots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \ldots\ldots\ldots$$

اگر صرف عددی قیمتوں کو ملحوظ رکھا جائے تو

$$\text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} = \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{د}^{\text{ن}-1}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{\text{ن}-1} < \text{ن}\,\frac{\text{ج}}{\text{د}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{\text{ن}-1}$$

اسلئے مشتقوں کے سلسلہ کی رقمیں ذیل کے سلسلہ کی متناظر رقموں سے تعداداً کم ہیں

$$\frac{\text{ج}}{\text{د}}\left\{1+2\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)+3\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{2}+\ldots\ldots\right\}$$

لیکن یہ سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہے کیونکہ جانچ کی نسبت $\frac{\text{لا}}{\text{د}}$ ہے جو تعداداً ایک سے کم ہے۔ اسلئے مشتقوں کا سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہے جبکہ لا دفعہ (ا، ب) کے اندر کوئی عدد ہو جہاں اعداد ا اور ب ایسے ہیں کہ

$-\text{ر} < \text{ا} < \text{ب} < \text{ر}$ (دفعہ ۴۲، مسئلہ ۲)

مثال $\text{لوک}(1+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{1}{2}\text{لا}^{2} + \frac{1}{3}\text{لا}^{3} - \ldots\ldots \quad (-1 < \text{لا} \leqq 1)$

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{1+\text{لا}} = 1 - \text{لا} + \text{لا}^{2} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

یہ مساوات درست ہے اگر $-1 < \text{لا} < 1$ لیکن یہ درست نہیں رہتی اگر $\text{لا} = 1$

۴۷۔ **مثالیں**۔ اس جگہ ہم دو مثالیں حل کرینگے جن میں معلومہ سلسلہ کو تکمل کرنے سے ایک تفاعل کو بطور ایک سلسلہ کے پھیلایا جائیگا۔

(۱) $\text{مس}^{-1}\,\text{لا}$

اگر $-1 < \text{لا} < 1$ تو

$$\frac{1}{1+\text{لا}^{2}} = 1 - \text{لا}^{2} + \text{لا}^{4} - \text{لا}^{6} + \ldots\ldots + (-1)^{\text{ن}}\,\text{لا}^{2\text{ن}} + \ldots\ldots \quad (1)$$

اس لئے صفر سے لا تک تکمل کرنے سے

$$\text{مس}^{-1}\text{لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۵} - \frac{\text{لا}^{۷}}{۷} + \dots + (-۱)^{\text{ن}} \frac{\text{لا}^{۲\text{ن}+۱}}{۲\text{ن}+۱} + \dots \quad (۱)$$

تفصیل (۱) صرف اس صورت میں ثابت کی گئی ہے جبکہ $|\text{لا}| < ۱$، سلسلہ (۱) اہتزازی ہے جبکہ $\text{لا} = \pm ۱$ لیکن (۱)، $\text{لا} = \pm ۱$ کے لئے مستدق ہے، اسلئے ہم ایبل کا مسئلہ (صفحہ ۱۹۲) لگا سکتے ہیں اور یہ حاصل کر سکتے ہیں کہ (۱) اس صورت میں بھی درست رہتا ہے جبکہ $\text{لا} = \pm ۱$۔
اگر $\text{لا} = ۱$ تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \dots \quad (۱_{۱})$$

سلسلہ $(۱_{۱})$ کو π کے لئے گریگوری کا (بعض اوقات لیب نیٹز کا) سلسلہ کہتے ہیں، لیکن یہ سرعت سے مستدق نہیں ہوتا، اس لئے حساب لگانے کی غرض سے موزوں نہیں۔ **میکن** کا ضابطہ استعمال کرنے سے بہتر سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\pi}{۴} = ۴\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{۱}{۵}\right) - \text{مس}^{-1}\left(\frac{۱}{۲۳۹}\right)$$

اس ضابطہ کو استعمال کر کے پھیلاؤ (۱) کی مدد سے π کا محسوب کرنا طالب علم کے لئے اچھی مشق ہوگی۔ $\text{مس}^{-1}\left(\frac{۱}{۵}\right)$ اور $\text{مس}^{-1}\left(\frac{۱}{۲۳۹}\right)$ کے سلسلے بڑی سرعت سے مستدق ہوتے ہیں، ان سے π کی قیمت اعشاریہ کے پانچویں یا چھٹے مقام تک بآسانی حاصل ہوتی ہے۔

(۲) $\text{جب}^{-1}\text{لا}$۔ اگر $-۱ < \text{لا} < ۱$ تو ثنائی پھیلاؤ کی رُو سے

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}} = (۱-\text{لا}^{۲})^{-\frac{۱}{۲}} = ۱ + \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\text{لا}^{۴} + \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\text{لا}^{۶} + \dots$$

اس لئے صفر سے لا تک تکمل کرنے سے

$$\text{جب}^{-1} \text{لا} = \text{لا} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\,\frac{\text{لا}^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\,\frac{\text{لا}^7}{7} + \ldots\ldots$$

ذیل کی مثال میں ہم دیکھینگے کہ ایک سلسلہ کے ذریعہ ایک تکملہ کی تقریبی قیمت کس طرح حاصل ہوسکتی ہے۔

(۳) اگر ایک سادہ رقاص کا طول ل ہو اور یہ خط انتصابی کے دونوں جانب زاویہ عہ میں سے اہتزاز کرے تو اس کے پورے اہتزاز کا وقت

$$= 4\,\text{ك}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} \quad \text{جہاں}$$

$$\text{ك} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{د فہ}}{\sqrt{1 - \text{ک}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}}} \quad \left(\text{ک} = \text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{2}\right)$$

ك کے لئے ایک سلسلہ مطلوب ہے۔

$\left(1 - \text{ک}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}\right)^{-\frac{1}{2}}$ کو مسئلہ ثنائی کی رو سے پھیلاؤ اور پھر رقم برقم تکمل کرو۔ اس طرح

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \text{ک}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}}} = 1 + \frac{1}{2}\,\text{ک}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\,\text{ک}^4\,\text{جب}^4\,\text{فہ} + \ldots$$

جب^2 فہ، جب^4 فہ، ..... کے تکملے اس سے قبل دفعہ ۱۰ میں معلوم کئے گئے ہیں، اسلئے

$$\text{ك} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\text{ک}^2 + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2\text{ک}^4 + \left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\right)^2\text{ک}^6 + \ldots\ldots\right\}$$

اگر عہ چھوٹا ہو تو ک^2، ک^4، ..... کو نظرانداز کرسکتے ہیں، اس صورت میں

$$\text{ك} = \frac{\pi}{2} \quad \text{اور پورے اہتزاز کی مدت} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$$

(۴) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\text{جم}\,\text{ر لا}\;\text{د لا}}{1 - 2\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{لا} + \text{ا}^2}$ (ر مثبت صحیح ہے)

اگر |ا| < ۱ تو مشق ۱۲ سوال ۱۳ کی رُو سے

$$\frac{۱}{۱ - ۲ ا جم لا + ا^۲} = \frac{۱}{۱ - ا^۲} \{ ۱ + ۲ ا جم لا + ۲ ا^۲ جم ۲ لا + ۲ ا^۳ جم ۳ لا + \ldots\ldots \}$$

نیز $\int_{۰}^{\pi}$ جم ن لا جم ر لا د لا = ۰ اگر ن ≠ ر

= $\frac{\pi}{۲}$ اگر ن = ر

اس لئے اگر سلسلہ کو جم ر لا کے ساتھ ضرب دیکر تکمل کیا جائے تو ہر رقم صفر ہو جائے گی سوائے ۲ ا^ر جم ر لا جم ر لا کے، اس طرح حاصل ہوگا

$$\int_{۰}^{\pi} \frac{جم ر لا د لا}{۱ - ۲ ا جم لا + ا^۲} = \frac{\pi}{۱ - ا^۲} ا^ر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اگر |ا| > ۱ تو

$$\frac{۱}{۱ - ۲ ا جم لا + ا^۲} = \frac{۱}{ا^۲} \cdot \frac{۱}{۱ - ۲ \times \frac{۱}{ا} جم لا + \frac{۱}{ا^۲}}$$

اسے $\frac{۱}{ا}$ کی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے ۔ یا (۱) میں ا کی بجائے $\frac{۱}{ا}$ لکھکر ہم $\frac{۱}{ا^۲}$ سے ضرب دے سکتے ہیں۔ تکملہ کی قیمت ہوگی $\frac{\pi ا^{-ر}}{ا^۲ - ۱}$

مشق ۱۳

۱ ۔ ثابت کرو کہ ذیل کے پھیلاؤ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے درست ہیں

(۱) $جب (لا + عہ) = جب عہ + لا جم عہ - \frac{لا^۲}{\lfloor ۲} جب عہ - \frac{لا^۳}{\lfloor ۳} جم عہ + \ldots\ldots\ldots$

(۲) $ہو^{لا} جم لا = ۱ + لا - \frac{۲ لا^۳}{\lfloor ۳} - \frac{۲^۲ لا^۴}{\lfloor ۴} - \ldots\ldots + ۲^{\frac{ن}{۲}} جم \frac{ن \pi}{۴} \frac{لا^ن}{\lfloor ن} + \ldots\ldots$

(۳) قو^{لا} جب لا = لا + لا^۲ + ۲لا^۳/|۳ − ۲^۲ لا^۵/|۵ − ...... + ۲^{ن/۲} جب (ن π/۴) لا^ن/|ن + ...

(۴) قو^{لا جم عا} جم(لا جب عا) = ۱ + لا جم عا + لا^۲/|۲ جم ۲عا + لا^۳/|۳ جم ۳عا + ...

ثابت کرو کہ عف^ن قو^{لا جم عا} جم(لا جب عا) = قو^{لا جم عا} جم(لا جب عا + ن عا)

۲۔ سوال ۱، (۲)، (۳) سے جمز لا جم لا، جبز لا جب لا، جمز لا جب لا، جبز لا جم لا کے پھیلاؤ حاصل کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ اگر |لا| < ۱ تو

لوک(۱ + لا + لا^۲) = لا + لا^۲/۲ − ۲لا^۳/۳ + لا^۴/۴ + ...

۴۔ جہاں تک رقمیں پھیلاؤ میں دی گئی ہیں وہاں تک ثابت کرو کہ

(۱) قط لا = ۱ + لا^۲/۲ + ۵لا^۴/۲۴ + ۶۱لا^۶/۷۲۰

(۲) مس لا = لا + لا^۳/۳ + ۲لا^۵/۱۵ + ۱۷لا^۷/۳۱۵

(۳) لا مم لا = ۱ − لا^۲/۳ − لا^۴/۴۵ − ۲لا^۶/۹۴۵

جم لا اور جب لا کی بجائے ان کے مرادف سلسلے رکھنے اور تقسیم کرنے سے یہ پھیلاؤ حاصل ہو سکتے ہیں۔ کیا مم لا مکلارن کے مسئلے سے پھیلایا جا سکتا ہے؟

۵۔ اگر لا اتنا چھوٹا ہو کہ اس کے مربعے اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کر دی جا سکیں تو ثابت کرو کہ

{(۴ + لا)^{۱/۲} + (۱ + لا)^۳} ÷ {(۱ + ۳لا)^{۱/۳} + (۱ − لا)^{۲/۵}} = ۳/۲ − ۳۷لا/۱۲۰

۶- اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}}{\text{نو}^{\text{لا}} - ۱}$ تو ثابت کرو کہ $\text{ف}(\text{لا})$ اور $\text{فَ}(\text{لا})$ کی انتہائیں $\text{لا} \to ۰$ کے لئے بالترتیب ۱ اور $-\frac{۱}{۲}$ ہیں - نیز مساوات

$$\text{نو}^{\text{لا}}\, \text{ف}(\text{لا}) - \text{ف}(\text{لا}) - \text{لا} = ۰$$

کو ن بار تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ

$$\text{نو}^{\text{لا}} \left\{ \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) + \text{ج}^{\text{ن}}_{۱}\, \text{ف}^{(\text{ن}-۱)}(\text{لا}) + \ldots + \text{ج}^{\text{ن}}_{۱}\, \text{فَ}(\text{لا}) + \text{ف}(\text{لا}) \right\} = \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})$$

اور اس لئے اگر ن > ۱ تو

$$\text{ج}^{\text{ن}}_{۱}\, \text{ف}^{(\text{ن}-۱)}(۰) + \text{ج}^{\text{ن}}_{۲}\, \text{ف}^{(\text{ن}-۲)}(۰) + \ldots + \text{ج}^{\text{ن}}_{۱}\, \text{فَ}(۰) + \text{ف}(۰) = ۰$$

جہاں $\text{لا} \to ۰$ کے لئے تفاعلوں کی جو انتہائیں ہیں انہیں لا = ۰ پر ان کی قیمتیں متصور کیا جائے -

۷- $$\frac{\text{لا}}{\text{نو}^{\text{لا}} - ۱} = ۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{\text{ب}_۱}{\underline{|۲}}\text{لا}^۲ - \frac{\text{ب}_۲}{\underline{|۴}}\text{لا}^۴ + \frac{\text{ب}_۳}{\underline{|۶}}\text{لا}^۶ - \ldots$$

ثابت کرو کہ $\text{ب}_۱ = \frac{۱}{۶}$، $\text{ب}_۲ = \frac{۱}{۳۰}$، $\text{ب}_۳ = \frac{۱}{۴۲}$، ......

$\text{ب}_۱$، $\text{ب}_۲$، $\text{ب}_۳$، ..... برنولی کے اعداد ہیں (ملاحظہ ہو کرسٹل کا جبر و مقابلہ، حصہ دوم، باب ۲۸، دفعہ ۶)

۸- ثابت کرو کہ $$\frac{\text{لا}}{\text{نو}^{\text{لا}} + ۱} = \frac{\text{لا}}{۲} - (۲^۲ - ۱)\frac{\text{ب}_۱}{\underline{|۲}}\text{لا}^۲ + (۲^۴ - ۱)\frac{\text{ب}_۲}{\underline{|۴}}\text{لا}^۴ - (۲^۶ - ۱)\frac{\text{ب}_۳}{\underline{|۶}}\text{لا}^۶ + \ldots$$

۹۔ اگر $ف(لا) = \frac{جب^{-1} لا}{\sqrt{1 - لا^2}}$ تو ثابت کرو کہ

$$(1 - لا^2)\, ف'(لا) - لا\, ف(لا) = 1$$

اور اگر $|لا| < 1$ تو

$$\frac{جب^{-1} لا}{\sqrt{1 - لا^2}} = لا + \frac{2}{3} لا^3 + \frac{4 \times 2}{5 \times 3} لا^5 + \frac{6 \times 4 \times 2}{7 \times 5 \times 3} لا^7 + \ldots\ldots$$

۱۰۔ سوال ۹ سے ثابت کرو کہ

$$(1)\quad طہ = جب\, طہ\, جم\, طہ \left(1 + \frac{2}{3} جب^2 طہ + \frac{4 \times 2}{5 \times 3} جب^4 طہ + \ldots\right)$$

$$(2)\quad مس^{-1} ی = \frac{ی}{1 + ی^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{ی^2}{1 + ی^2} + \frac{4 \times 2}{5 \times 3} \left(\frac{ی^2}{1 + ی^2} \right)^2 + \ldots\ldots \right\}$$

رکھو $لا = جب\, طہ$، $مس\, طہ = ی$

۱۱۔ سوال ۹ سے بذریعہ عمل تکمل حاصل کرو کہ اگر $|لا| < 1$ تو

$$\frac{1}{2} \left[جب^{-1} لا \right]^2 = \frac{لا^2}{2} + \frac{2}{3} \frac{لا^4}{4} + \frac{4 \times 2}{5 \times 3} \frac{لا^6}{6} + \ldots\ldots$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ $جم(ا\, جب^{-1} لا)$ مساوات (۳) دفعہ ۴۵ کو پورا کرتی ہے اور ثابت کرو کہ

اگر $|لا| < 1$ تو

$$جم(ا\, جب^{-1} لا) = 1 - \frac{ا^2}{\underline{|2}} لا^2 - \frac{ا^2 (2^2 - ا^2)}{\underline{|4}} لا^4 - \frac{ا^2 (2^2 - ا^2)(4^2 - ا^2)}{\underline{|6}} لا^6 - \ldots$$

۱۳۔ $جب(ا\, جب^{-1} لا)$ اور $جم(ا\, جب^{-1} لا)$ کے سلسلہ سے ثابت کرو کہ

$$(1)\quad جب\, م\, طہ = م\, جب\, طہ - \frac{م(م^2 - 1)}{\underline{|3}} جب^3 طہ + \frac{م(م^2 - 1)(م^2 - 3^2)}{\underline{|5}} جب^5 طہ - \ldots$$

(۲) $\text{جم م طہ} = ۱ - \frac{م^۲}{|\underline{۲}}\,\text{جب}^۲\text{طہ} + \frac{م^۲(م^۲-۲^۲)}{|\underline{۴}}\,\text{جب}^۴\text{طہ} - \dots$

$\frac{\text{جم م طہ}}{\text{جم طہ}}$ ، $\frac{\text{جب م طہ}}{\text{جم طہ}}$ کے لئے سلسلے $\text{جب}(\text{ا جب}^{-۱}\text{لا})$ اور $\text{جم}(\text{ا جب}^{-۱}\text{لا})$ کو تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۴- اگر $|\text{لا}| < ۱$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{۱+\text{لا}^۲}\right\} = \text{لا} - \frac{۱}{۲}\frac{\text{لا}^۳}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\frac{\text{لا}^۵}{۵} - \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\frac{\text{لا}^۷}{۷} + \dots\dots$

(۲) $\frac{۱}{۲}\left\{\text{لوک}(۱+\text{لا})\right\}^۲ = \frac{\text{لا}^۲}{۲} - \left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\frac{\text{لا}^۳}{۳} + \left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)\frac{\text{لا}^۴}{۴} - \left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\right)\frac{\text{لا}^۵}{۵} + \dots\dots$

۱۵- اگر $|\text{لا}| < ۱$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{و}^{\text{ک جب}^{-۱}\text{لا}} = ۱ + \text{ک لا} + \frac{\text{ک}^۲}{|\underline{۲}}\text{لا}^۲ + \frac{\text{ک}(\text{ک}^۲+۱^۲)}{|\underline{۳}}\text{لا}^۳ + \frac{\text{ک}^۲(\text{ک}^۲+۲^۲)}{|\underline{۴}}\text{لا}^۴ + \dots\dots$

(۲) $\left\{\text{لا} + \sqrt{۱+\text{لا}^۲}\right\}^{\text{ک}} = ۱ + \text{ک لا} + \frac{\text{ک}^۲}{|\underline{۲}}\text{لا}^۲ + \frac{\text{ک}(\text{ک}^۲-۱^۲)}{|\underline{۳}}\text{لا}^۳ + \frac{\text{ک}^۲(\text{ک}^۲-۲^۲)}{|\underline{۴}}\text{لا}^۴ + \dots\dots$

استدقاق ثابت کرنے کے لئے ملاحظہ ہو کہ ہر دو (۱) اور (۲) میں طاق رقموں کے

لینے سے جو سلسلے بنتے ہیں اور جفت رقموں کے لینے سے جو سلسلے بنتے ہیں وہ جدا گانہ متدق ہیں یا متسع بموجب اسکے کہ | لا | کم ہو یا بڑا ہو ایک سے۔

۱۶۔ معمولی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ ناقص کا محیط

$$۴ ا \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (۱ - ز^۲ جب^۲ فہ) فرفہ = ۲\pi ا \left\{ ۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \frac{ز^۲}{۱} - \left(\frac{۳\times۱}{۴\times۲}\right)^۲ \frac{ز^۴}{۳}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{۵\times۳\times۱}{۶\times۴\times۲}\right)^۲ \frac{ز^۶}{۵} - \ldots \right\}$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ (۱) چھوٹے خروج المرکز ز والے ایک ناقص کا گھیرا مساوی رقبہ والے ایک دائرہ کے گھیرے سے تقریباً اس نسبت $۱ + \frac{۳ ز^۴}{۶۴}$ سے بڑا ہوتا ہے

(۲) ایک گردشی ناقص نما (خواہ یہ چپٹا ہو یا لمبوترا) جس کا خروج ز چھوٹا ہو اسکی سطح منحنی مساوی حجم والے ایک کرہ کی سطح منحنی سے بقدر اپنی کسر $\frac{۲ ز^۴}{۴۵}$ کے زیادہ ہوتی ہے۔

۱۸۔ $\frac{جم طہ + لا}{۱ + ۲ لا جم طہ + لا^۲}$ کو پہلے بلحاظ لا کے، پھر بلحاظ طہ کے تکمل کرنے سے (ملاحظہ ہو مشق ۱۲، ۱۲) ثابت کرو کہ اگر | لا | < ۱ تو

$$(۱)\ \frac{۱}{۲} لوک (۱ + ۲ لا جم طہ + لا^۲) = لا جم طہ - \frac{لا^۲}{۲} جم ۲ طہ$$

$$+ \frac{لا^۳}{۳} جم ۳ طہ - \ldots$$

$$(۲)\ مس^{-۱} \left(\frac{لا جب طہ}{۱ + لا جم طہ}\right) = لا جب طہ - \frac{لا^۲}{۲} جب ۲ طہ$$

$$+ \frac{لا^۳}{۳} جب ۳ طہ - \ldots$$

۱۹۔ مثال ۱۸ سے لا ← ۱ کے لئے انتہا لینے سے ثابت کرو کہ اگر $-\pi <$ طہ $<$

تو (۱) جم طا − ½ جم ۲ طا + ⅓ جم ۳ طا − ..... = لوک (۲ جم ½ طا)

(۲) جب طا − ½ جب ۲ طا + ⅓ جب ۳ طا − ..... = ½ طا

ثابت کرو کہ سلسلہ (۲) تفاعل طا/۲ کو صرف اسی حالت میں تعبیر کرتا ہے جبکہ $-\pi <$ طا $< \pi$ اور سلسلہ کی قیمت جبکہ طا $= \pi$ صفر ہے لیکن طا $\to \pi$ کے لئے سلسلہ کی انتہا $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگرچہ اوپر کے دونوں سلسلے مستدق ہیں لیکن ان میں سے کوئی بھی رقم برقم تفرق نہیں ہو سکتا (مشق ۱۲، ۱۵)

۲۰۔ مثال ۱۹ میں طا مساوی $\pi -$ لا رکھنے سے حاصل کرو کہ اگر ۰ < لا < 2π

تو (۱) جم لا + ½ جم ۲ لا + ⅓ جم ۳ لا + ... = − لوک (۲ جب لا/۲)

(۲) جب لا + ½ جب ۲ لا + ⅓ جب ۳ لا + ... = $\frac{\pi}{2}$ − لا/۲

۲۱۔ سوال ۲۰ (۲) کو تکمل کرنے سے ثابت کرو کہ اگر ۰ ≦ لا ≦ 2π تو

لا²/۴ − π لا/۲ = (جم لا/۱² + جم ۲ لا/۲² + جم ۳ لا/۳² + ...) − ج

جہاں ج = $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots$

سلسلہ لا کی ہر قیمت کے لئے یکساں طور پر مستدق ہے، اس لئے تکمل کے بعد ہم لا کو قیمتیں صفر اور 2π دے سکتے ہیں، لیکن یہ دوری سلسلہ ہے اور وقفہ ($0, 2\pi$) کے باہر تفاعل لا²/۴ − π لا/۲ کو تعبیر نہیں کرتا۔

۲۲۔ سوال ۲۱ سے حاصل کرو کہ

(۱) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$ (۲) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

(۳) $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$

(۱) حاصل کرنے کے لئے سوال ۲۱ میں رکھو $\text{لا} = \pi$ ، (۲) اور (۳) بآسانی حاصل ہوتے ہیں (ملاحظہ ہو مشق ۱۲ ، سوال ۳)

۲۳- ثابت کرو کہ

(۱) $\int_0^1 \frac{1}{\text{لا}} \text{لوک}(1+\text{لا})\, \text{فرلا} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$

(۲) $\int_0^1 \frac{1}{\text{لا}} \text{لوک}(1-\text{لا})\, \text{فرلا} = -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = -\frac{\pi^2}{6}$

(۳) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{مس طا لوک (مم طا) فرطا} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\right)$

$= \frac{\pi^2}{48}$

(۳) حاصل کرنے کے لئے رکھو مس طا = لا اور یاد رہے کہ $\text{نہا}_{\text{لا}\to 0}\ \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{لوک لا} = 0$

(مشق ۷ ، سوال ۱۰ ، حصہ اول)

۲۴- ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{\text{جم لا}}{1^2} - \frac{\text{جم ۲لا}}{2^2} + \frac{\text{جم ۳لا}}{3^2} - \frac{\text{جم ۴لا}}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\text{لا}^2}{4}$

(۲) $\frac{\text{جم لا}}{1^2} + \frac{\text{جم ۳لا}}{3^2} + \frac{\text{جم ۵لا}}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi\,\text{لا}}{4}$

(۱) میں $-\pi \leqq \text{لا} \leqq \pi$ ، (۲) میں $0 \leqq \text{لا} \leqq \pi$

۲۵- ثابت کرو کہ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے

(۱) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \text{جم}(\text{لا جم طا})\, \text{فرطا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{2^2} + \frac{\text{لا}^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{\text{لا}^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots$

(۲) $\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\text{جم}(\text{لا جم طہ})\,\text{جب}^{۲ر}\text{طہ}\,\text{د طہ} = \frac{\lfloor ۲ر}{۲^{۲ر}(\lfloor ر)^{۲}}\left\{۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲(۲ر+۲)} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۲\times۴(۲ر+۲)(۲ر+۴)} - \cdots\right\}$

۲۶- اگر سوال ۲۵ (۱) میں ما سلسلہ (یا تکملہ) کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{د}^{۲}\text{ما}}{\text{د لا}^{۲}} + \frac{۱}{\text{لا}}\,\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} + \text{ما} = ۰$$

۲۷- اگر سوال ۲۵ (۲) میں ع سلسلہ (یا تکملہ) کو تعبیر کرے اور اگر ما = لا^{ر} ع تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{۲}\,\frac{\text{د}^{۲}\text{ما}}{\text{د لا}^{۲}} + \text{لا}\,\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} + (\text{لا}^{۲} - ر^{۲})\,\text{ما} = ۰$$

ما، رتبہ ر کا بیلسل کا تفاعل کہلاتا ہے اور (سوائے ایک عددی جزو ضربی کے) اسے ہم بالعموم جے$_{ر}$ (لا)، سے تعبیر کرینگے۔ سوال ۲۶ کا تفاعل، جے$_{۰}$ (لا) ہے [ملاحظہ ہوں گرے اور میتھیو کے بیسلی تفاعل]

۲۸- اگر ن مثبت صحیح ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب لا}(۱ + ۲\,\text{جم}\,۲\text{لا} + ۲\,\text{جم}\,۴\text{لا} + \ldots + ۲\,\text{جم}\,۲\text{ن لا}) = \text{جب}(۲\text{ن}+۱)\text{لا}$$

اور اس سے پھر ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\text{جب}(۲\text{ن}+۱)\text{لا}}{\text{جب لا}}\,\text{د لا} = \frac{\pi}{۲}$$

۲۹- ذیل کے نتائج ثابت کرو، ا مثبت ہے اور ر مثبت صحیح ہے۔

(۱) $\int_{۰}^{\pi}\text{لوک}(۱ - ۲\,\text{ا}\,\text{جم لا} + \text{ا}^{۲})\,\text{د لا} = ۰$ اگر ا < ۱

$= ۲\pi\,\text{لوک ا}$ اگر ا > ۱

(۲) $\int_{۰}^{\pi}\frac{\text{لا جب لا}\,\text{د لا}}{۱ - ۲\,\text{ا}\,\text{جم لا} + \text{ا}^{۲}} = \frac{\pi}{\text{ا}}\,\text{لوک}(۱+\text{ا})$ اگر ا < ۱

$$= \frac{\pi}{\text{ا}} \text{لوک} \left(۱ + \frac{۱}{\text{ا}}\right) \quad \text{اگر ا} > ۱$$

(۳) $$\int_{۰}^{\pi} \text{جم رلا لوک} (۱ - ۲\,\text{ا جم لا} + \text{ا}^{۲})\, \text{فرلا} = \frac{-\pi\, \text{ا}^{\text{ر}}}{\text{ر}} \quad \text{اگر ا} < ۱$$

$$= \frac{-\pi\, \text{ا}^{-\text{ر}}}{\text{ر}} \quad \text{اگر ا} > ۱$$

(۴) $$\int_{۰}^{\pi} \frac{\text{جب لا جب رلا فرلا}}{۱ - ۲\,\text{ا جم لا} + \text{ا}^{۲}} = \frac{\pi}{۲}\, \text{ا}^{\text{ر}-۱} \quad \text{اگر ا} < ۱$$

$$= \frac{\pi}{۲}\, \text{ا}^{-(\text{ر}+۱)} \quad \text{اگر ا} > ۱$$

۳۔ ثابت کرو کہ (۱) $$\int_{۰}^{\text{لا}} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\, \text{فرلا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۳\lfloor ۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۵\lfloor ۵} - \ldots$$

(۲) $$\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{\text{لا}}\, \text{فرلا} = ۱ - \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۳^{۳}} - \frac{۱}{۴^{۴}} + \ldots$$

(۲) حاصل کرنے کے لئے $\text{لا}^{\text{لا}}$ کو اس شکل $\text{ہ}^{\text{لا لوک لا}}$ میں رکھو اور پھیلاؤ۔

باب ہفتم

ٹیلر کا مسئلہ دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کی صورت میں۔ اس مسئلہ کا استعمال

۴۸ - دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لئے ٹیلر کا مسئلہ۔ ایک سے زیادہ متغیروں کی صورت میں اب ہم مختصر طور پر ایسے پھیلاؤ حاصل کرینگے جو ٹیلر کے مسئلہ کے جواب ہیں۔ باقیات کے لئے جملے پیچیدہ ہیں' انہیں نہیں لکھا جائیگا اگرچہ انکی شکل کا اندازہ سلک ثبوت سے بآسانی ہو سکیگا۔ اگر ہم باقیوں کی کوئی مناسب بحث اسجگہ اختیار کریں تو جبریہ صورتوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہم چلے جائینگے۔ یہاں یہ تسلیم کر لیا جائے گا کہ تفاعل اور ان کے تمام مشتق جو باقی تک اور باقی میں شریک ہوتے ہیں وہ سب کے سب مسلسل ہیں۔

سب سے پہلے ہم ف (لا+ھ' ما+ک) کا پھیلاؤ ھ اور ک کی قوتوں میں حاصل کرینگے۔ یہ پھیلاؤ دفعہ ۴۳ کے ضابطہ (۱۳) کا جواب ہے۔

ف (لا+ھ' ما+ک) تفاعل ف (لا+ھت' ما+ک ت) کی قیمت ہے جبکہ ت = ۱'

اب اگر ف (لا+ھت' ما+ک ت) کو ت کا تفاعل خیال کیا جائے تو اسے ہم مکلارن کے مسئلہ سے پھیلا سکتے ہیں۔ اختصار کی خاطر ف (لا+ھت' ما+ک ت) کو فا (ت) سے تعبیر کرو اور اسکے ت' مشتقوں کو زبروں سے بیان کرو۔ تب

فا(ت) = فا(٠) + ت فاَ(٠) + (ت۲ / ۲) فاً(٠) + ... + حبن(ت) + ... (۱)

اب ہم یہ دیکھینگے کہ فاَ(ت) کے ت کے مشتق کو لا، ما کے لحاظ سے فا(ت) کے جزوی مشتقوں میں کس طرح بیان ہو سکتے ہیں۔

رکھو $\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ت} = \text{عا}$ ، $\text{ما} + \text{ک}\,\text{ت} = \text{با}$ ......(۲)

تب
$$\text{فاَ(ت)} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف عا}}\,\frac{\text{ؤ عا}}{\text{ؤ ت}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف با}}\,\frac{\text{ؤ با}}{\text{ؤ ت}} = \text{ھ}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف عا}} + \text{ک}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف با}} \quad \text{......(۳)}$$

لیکن $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف عا}} \times \frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف عا}}$ کیونکہ (۲) سے

$\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}} = 1$ اور اسی طرح $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف با}}$

اس طرح رشتہ (۳) ہوجاتا ہے

$$\text{فاَ(ت)} = \text{ھ}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\,\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} \quad \text{......(۴)}$$

رابطہ (۴) کا مطلب شاید اچھی طرح سمجھ میں آئیگا اگر کسی خاص صورت پر غور کیا جائے

مثلاً فا(ت) = $(\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ت})^{\text{م}}\,(\text{ما} + \text{ک}\,\text{ت})^{\text{ن}}$۔ اس جملہ کے ساتھ اوپر کا سلوک کرنے سے فاَ(ت) معلوم کیا جائے، اس طرح معلوم ہوگا کہ فاَ(ت) بھی لا + ھ ت اور ما + ک ت کا تفاعل ہے اور اس لئے فاَ(ت) حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہوسکتا ہے۔

اب فاَ(ت) تفاعل فاَ(ت) کا ت مشتق ہے اور (۴) میں فا(ت) کی بجائے فاَ(ت) رکھنے سے حاصل ہوسکیگا۔ پس

$$\text{فاً(ت)} = \text{ھ}\,\frac{\text{جف فاَ}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\,\frac{\text{جف فاَ}}{\text{جف ما}}$$

$$=\text{ھ}\left\{\text{ھ}\frac{\text{جف}^{2}\text{فا}}{\text{جف لا}^{2}}+\text{ک}\frac{\text{جف}^{2}\text{فا}}{\text{جف لا جف ما}}\right\}+\text{ک}\left\{\text{ھ}\frac{\text{جف}^{2}\text{فا}}{\text{جف ما جف لا}}+\text{ک}\frac{\text{جف}^{2}\text{فا}}{\text{جف ما}^{2}}\right\}$$

$$=\text{ھ}^{2}\frac{\text{جف}^{2}\text{فا}}{\text{جف لا}^{2}}+2\,\text{ھ ک}\frac{\text{جف}^{2}\text{فا}}{\text{جف لا جف ما}}+\text{ک}^{2}\frac{\text{جف}^{2}\text{فا}}{\text{جف ما}^{2}}\quad\ldots\ldots(5)$$

اسی طرح

$$\text{فا}'''(\text{ت})=\text{ھ}^{3}\frac{\text{جف}^{3}\text{فا}}{\text{جف لا}^{3}}+3\,\text{ھ}^{2}\text{ک}\frac{\text{جف}^{3}\text{فا}}{\text{جف لا}^{2}\text{جف ما}}+3\,\text{ھ ک}^{2}\frac{\text{جف}^{3}\text{فا}}{\text{جف لا جف ما}^{2}}+\text{ک}^{3}\frac{\text{جف}^{3}\text{فا}}{\text{جف ما}^{3}}\quad\ldots\ldots(6)$$

مشتق کی ترکیب کا قانون اب صاف ظاہر ہے، ابھی ہم دیکھینگے کہ $\text{فا}^{(4)}(\text{ت})$ کی قیمت کس طرح منضبط شکل میں لکھی جا سکتی ہے، مگر اس سے پہلے ہم فا(۰)، فا′(۰)، فا″(۰) کی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

فا(۰) = ف(لا، ما) اور فا′(۰)، فا″(۰)، فا‴(۰) کی قیمتیں (۴)، (۵)، (۶) میں فا(ت)، کی بجائے محض ف(لا، ما) رکھنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

باقی کی لنگرانج کی شکل حاصل کرنے کے لئے ہمیں $\text{فا}^{(\text{ن})}(\text{ت})$ میں ت کی بجائے طہ ت رکھنا چاہئے جہاں طہ کسر واجب ہے، اگر ن = ۳ تو (۶) میں فا‴(ت) کی بجائے ہمیں ف(لا + ھ طہ ت، ما + ک طہ ت) رکھنا ہوگا۔

اس طرح ربط (۱) ہو جائیگا

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ ت},\ \text{ما}+\text{ک ت})=\text{ف}(\text{لا},\text{ما})+\text{ت}\left(\text{ھ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}+\text{ک}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\right)$$

$$+\frac{\text{ت}^{2}}{2!}\left(\text{ھ}^{2}\frac{\text{جف}^{2}\text{ف}}{\text{جف لا}^{2}}+2\,\text{ھ ک}\frac{\text{جف}^{2}\text{ف}}{\text{جف لا جف ما}}+\text{ک}^{2}\frac{\text{جف}^{2}\text{ف}}{\text{جف ما}^{2}}\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots(7)$$

ف (لا + ھ، ما + ک) کا پھیلاؤ حاصل کرنے کے لئے (۷) میں ت کی بجائے ایک رکھو

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}،\ \text{ما}+\text{ک}) = \text{ف}(\text{لا}،\ \text{ما}) + \text{ھ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$$

$$+ \frac{1}{\lfloor 2}\left(\text{ھ}^2\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا}^2} + 2\,\text{ھ ک}\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا جف ما}} + \text{ک}^2\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف ما}^2}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots \quad (۸)$$

(۸) سے مطلوبہ پھیلاؤ حاصل ہوتا ہے، پھیلاؤ (۷) بھی نہایت کارآمد ہے۔

فاَ(ت)، فاَ(ت) کی جو قیمتیں (۵) اور (۶) میں لکھی گئی ہیں وہ رموز کے پیرایہ میں زیادہ منضبط شکل میں اس طرح لکھی جا سکتی ہیں

$$\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^2 \text{فا}،\quad \left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^3 \text{فا} \ldots (۹)$$

بشرطیکہ ان کا یہ مفہوم ہمارے پیش نظر رہے، مفہوم۔

جملہ ثنائی کو پھیلایا جائے گویا $\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ اور $\text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ مفرد مقداریں ہیں، پھیلاؤ کے بعد ہر رقم کے ساتھ آخر میں فاَ کو بطور جزو ضربی کے لکھا جائے، پھر اس طرح کی رقم $3\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\right)^2\left(\text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)$ فاَ کی بجائے پہلے $3\,\text{ھ}^2\text{ک}\frac{\text{جف}^3}{\text{جف لا}^2\text{جف ما}}$ فاَ پھر $3\,\text{ھ}^2\text{ک}\frac{\text{جف}^3\text{فا}}{\text{جف لا}^2\text{جف ما}}$ رکھا جائے۔

اس ترقیم کے موافق (۷) میں (م + ۱) ویں رقم ہوگی

$$\frac{\text{ت}^{\text{م}}}{\lfloor \text{م}}\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{م}} \text{ف}$$

$$= \frac{\text{ت}^{\text{م}}}{\underline{|\text{م}}}\left(\text{ھ}^{\text{م}}\frac{\text{جف}^{\text{م}}\text{ف}}{\text{جف لا}^{\text{م}}} + \text{م ھ}^{\text{م}-1}\text{ک}\frac{\text{جف}^{\text{م}}\text{ف}}{\text{جف لا}^{\text{م}-1}\text{جف ما}} + \dots\dots + \dots + \text{ک}^{\text{م}}\frac{\text{جف}^{\text{م}}\text{ف}}{\text{جف ما}^{\text{م}}}\right)$$

شکل (۸) میں لا کی بجائے ھ اور ما کی بجائے ک رکھنے سے ف (لا + ھ ' ما + ک) کا پھیلاؤ لا ' ما کی قوتوں میں حاصل ہو سکتا ہے ' لاحقوں والی ترقیم استعمال کرنے سے

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}، \text{ما}+\text{ک}) = \text{ف}(\text{ھ}، \text{ک}) + \text{لا ف}_{\text{ھ}} + \text{ما ف}_{\text{ک}}$$

$$+ \frac{1}{\underline{|2}}\left(\text{لا}^2\text{ف}_{\text{ھھ}} + 2\,\text{لا ما ف}_{\text{ھک}} + \text{ما}^2\text{ف}_{\text{کک}}\right) + \dots\dots \quad (۱۰)$$

ف$_{\text{ھ}}$ ' ف$_{\text{ھھ}}$ مرتب کرنے کے لئے ہمیں ف (لا ' ما) کو بلحاظ لا اور ما کے تفرق کرنا چاہیئے اور پھر لا کی بجائے ھ اور ما کی بجائے ک رکھنا چاہیئے

(۱۰) میں اگر ہم چاہیں تو رکھ سکتے ہیں ھ = ۰ ' ک = ۰ ' اس طرح ہمیں ف (لا ' ما) کا پھیلاؤ میکلارن کے مسئلے کے جواب میں ملیگا۔

اگر متغیر تین یا زیادہ ہوں تو پھیلاؤ اسی شکل کے ہونگے جو اوپر حاصل ہوئے ' مثلاً تین متغیروں کی صورت میں

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}، \text{ما}+\text{ک}، \text{ی}+\text{ل}) = \text{ف}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی}) + \text{ھ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$$

$$+ \text{ک}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \text{ل}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} + \frac{1}{\underline{|2}}\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right.$$

$$\left. + \text{ل}\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}\right)^2\text{ف} + \dots\dots \quad (۱)$$

جہاں رموزی جملات کی تعبیر وہی ہے جو اوپر بیان ہوئی۔

۴۹ - مثالیں (۱) سطح ف (لا، ما، ی) = ۰ کے نقطہ ن (ھ، ک، ل) پر مماسی مستوی سطح کی مساوات معلوم کرو۔

ن میں سے گذرنے والے کسی خط مستقیم کی مساواتیں جسکی جیوب التمام لہ، مہ، نہ ہوں یہ ہیں

(لا - ھ) / لہ = (ما - ک) / مہ = (ی - ل) / نہ = ر .... (۱)

جہاں ر فاصلہ ہے (لا، ما، ی) کا (ھ، ک، ل) سے۔ فرض کرو کہ (لا، ما، ی) سطح پر کا نقطہ ق ہے۔ تب لا = ھ + لہ ر، ما = ک + مہ ر، ی = ل + نہ ر؛ ف (لا، ما، ی) = ۰

ف (لا، ما، ی) = ۰ میں لا، ما، ی کی بجائے اوپر کی قیمتیں مندرج کرنے اور ٹیلر کے مسئلہ سے پھیلانے سے

ف (ھ، ک، ل) + ر (لہ فھ + مہ فک + نہ فل) + ط ر² + ... = ۰ (۲)

لیکن ف (ھ، ک، ل) = ۰ کیونکہ ن سطح پر واقع ہے، اس لئے ر کی ایک قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے صفر ہے، (۲) کی باقی اصلیں نقطہ ن سے ان فاصلوں کو تعبیر کرتی ہیں جہاں خط (۱) سطح سے ملتا ہے۔ فرض کرو کہ ر = ن ق تب چونکہ ر صفر نہیں ہے، اس لئے مساوات (۲) ہو جاتی ہے

لہ فھ + مہ فک + نہ فل + ط ر + ... = ۰ (۳)

جیسے ر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے خط (۱) مماس کا محل اختیار کرتا ہے، لیکن (۳) سے ظاہر ہے کہ جیسے ر صفر ہوتا ہے لہ فھ + مہ فک + نہ فل بھی صفر ہوتا ہے۔

پس معلوم ہوا کہ خط (۱) مماسی خط ہوگا اگر لہ، ھہ، نہ اس مساوات کو پورا کریں

لہ ف_ھ + ھہ ف_ک + نہ ف_ل = ۰ ....(۴)

اگر ہم مساواتوں (۱) اور (۴) سے لہ، ھہ، نہ کو ساقط کریں تو ہمیں مساوات ملیگی جو ن میں سے گذرنے والے کسی مماسی خط کے کسی نقطہ کے محددوں کے لئے درست ہوگی، ان مقداروں کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا

(لا − ھ) ف_ھ + (ما − ک) ف_ک + (ی − ل) ف_ل = ۰

یہ وہی مساوات ہے جو دفعہ ۱۹ حصہ اول میں معلوم کی گئی، صرف ترتیب کا فرق ہے۔

مثال ۲۔ متجانس تفاعلوں کے لئے آئلر کا مسئلہ۔

تعریف۔ اگر دو یا زیادہ متغیروں کا تفاعل د ایسا ہو کہ متغیروں لا، ما، ... کی بجائے بالترتیب لہ لا، لہ ما، ... لکھنے سے تفاعل د، لہ^ن د ہو جائے خواہ مقدار لہ کچھ ہی ہو تو د کو ن ویں درجہ کا متجانس تفاعل کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ د = ف (لا، ما) دو متغیروں لا، ما میں ن ویں درجہ کا متجانس تفاعل ہے۔ تب ہم ثابت کریں گے کہ

لا د_لا + ما د_ما + ی د_ی = ن د ....(۱)

لا^۲ د_لالا + ۲ لا ما د_لاما + ما^۲ د_ماما = ن (ن − ۱) د ....(۲)

لا، ما کی بجائے (۱ + ت) لا، (۱ + ت) ما یعنی لا + ت لا، ما + ت ما رکھو، اس طرح د ہو جائے گا (۱ + ت)^ن د، پس

ف (لا + ت لا، ما + ت ما) = (۱ + ت)^ن د

دائیں جانب کے تفاعل کو ٹیلر کے مسئلہ سے اور بائیں جانب کے تفاعل کو مسئلہ ثنائی سے پھیلانے سے حاصل ہوگا

ف (لا، ما) + ف (لا ف + ما ف) + ت/۲! (لا^۲ ف + ۲ لا ما ف + ما^۲ ف)

+ ...... = د + ن ت د + ن (ن - ۱)/ ۱ × ۲ ت^۲ د + ...

ت کی متماثل قوتوں کے سروں کو مساوی رکھنے سے مساواتیں (۱) اور (۲) حاصل ہوتی ہیں۔ یہ دیکھنا آسان ہے کہ

(لا جف/جف لا + ما جف/جف ما)^م د = ن (ن - ۱) (ن - ۲) ... (ن - م + ۱) د

اور انہی مسائل کی تین یا زیادہ متغیروں والے متجانس تفاعلوں کی صورت تک توسیع کی جا سکتی ہے۔

مثلاً لا د_لا + ما د_ما + ی د_ی = ن د .... (۳)

مثال۔ فرض کرو کہ د = مس^{-۱} (ما/لا)، اس صورت میں د صفر درجہ کا ہے

د_لا = ۱/(۱ + ما^۲/لا^۲) × (-ما/لا^۲) = -ما/(لا^۲ + ما^۲)، د_ما = لا/(لا^۲ + ما^۲)

لا د_لا + ما د_ما = -لا ما/(لا^۲ + ما^۲) + لا ما/(لا^۲ + ما^۲) = ۰

۵۰ - دو یا زیادہ متغیروں والے تفاعل کی اعظم یا اقل قیمتیں۔

تعریف ف (ا، ب) قیمت اعظم ہوگی ف (لا، ما) کی اگر ف (ا + ھ، ب + ک) کم ہو ف (ا، ب) سے ھ اور ک کی تمام مثبت یا منفی قیمتوں کے لئے جو صفر اور کسی معینہ محدود مقداروں کے درمیان واقع ہوں خواہ یہ مقداریں

کتنی ہی چھوٹی کیوں نہ ہوں۔ ف (ا، ب) قیمت اقل ہوگی ف (لا، ما) کی اگر ف (ا + ھ، ب + ک) بڑا ہو ف (ا، ب) سے ھ، ک کی تمام ایسی قیمتوں کے لئے۔

دو سے زیادہ متغیروں والے تفاعلوں کے لئے ایسی ہی تعریفیں صادق آتی ہے۔ متغیر متبوع کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے ہم مان لینگے کہ تفاعل اور ان کے مشتق مسلسل ہیں۔

ف (ا، ب) کے اعظم یا اقل ہونے کے لئے (یعنی موڑ کی قیمت ہونے کے لئے) ضروری ھے کہ دونو $ف_{لا}$ اور $ف_{ما}$ صفر ہوں جبکہ لا = ا، ما = ب کیونکہ ف (ا، ب)، ف (لا، ما) کی موڑ کی قیمت نہیں ہو سکتی جب تک کہ یہ صرف لا کے تفاعل ف (لا، ب) کے موڑ کی قیمت نہ ہو جبکہ لا = ا اور نیز جب تک کہ یہ صرف ما کے تفاعل ف (ا، ما) کے موڑ کی قیمت نہ ہو جبکہ ما = ب۔ اس لئے $ف_{لا}$ (لا، ب) کو لازماً صفر ہونا چاہیئے جبکہ لا = ا اور $ف_{ما}$ (ا، ما) کو صفر ہونا چاہیئے جبکہ ما = ب۔

موڑ کی قیمت کے لئے اوپر کی شرط ضروری ہے۔ کافی شرائط معلوم کرنے کے لئے ف (ا + ھ، ب + ک) کو پھیلاؤ، اس طرح حاصل ہوگا

ف (ا + ھ، ب + ک) - ف (ا، ب)

$$= \frac{۱}{۲} (ھ^{۲} ف_{اا} + ۲ ھ ک ف_{اب} + ک^{۲} ف_{بب}) + ... (۱)$$

جہاں ھ $ف_{ا}$، ک $ف_{ب}$ کو حذف کر دیا گیا ہے کیونکہ $ف_{ا} = ۰ = ف_{ب}$ اگر ف (ا، ب) موڑ کی قیمت ہو۔

اور یہ قیمت، اعظم ہو گی اگر $ف_{اا}$ (یا $ف_{بب}$) منفی ہو اور اقل ہو گی اگر $ف_{اا}$ (یا $ف_{بب}$) مثبت ہو۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اس امر کے لئے ضروری شرط کہ ف (ا، ب، ج) تفاعل ف (لا، ما، ی) کے موڑ کی قیمت ہو یہ ہے، $ف_{ا}$، $ف_{ب}$، $ف_{ج}$ میں سے ہر ایک کو صفر ہونا چاہئے جبکہ لا = ا، ما = ب، ی = ج

کئی صورتوں میں یہ پہلے سے معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل کے موڑ کی قیمت کا لازماً وجود ہے، اور بالعموم اسے بغیر مزید ثبوت کے مان لیا جاتا ہے کہ متغیروں کی وہ قیمتیں جو تفاعل کے پہلے مشتقوں کو صفر بنا دیں ان سے تفاعل کے موڑ کی قیمت معلوم ہوتی ہے۔

۵۱ ۔ اس سلسلہ کی مشہور صورتیں وہ ہیں جن میں تفاعل جسکے موڑ کی قیمتیں مطلوب ہوں دو، تین یا زیادہ متغیروں کا تفاعل ہو اور متغیر خود ایک یا دو شرطی مساواتوں کے ذریعہ مربوط ہوں۔ ایسی صورتوں میں متناسب طرز عمل بالعموم یہ ہو گا۔ فرض کرو کہ تفاعل ء (مثلاً) چار متغیروں کا تفاعل ہے اور چار متغیروں میں دو شرطی ربط معلوم ہیں۔

ء = ف (لا، ما، ی، ھ) .... (۱)

فا (لا، ما، ی، ھ) = ... (۲) سا (لا، ما، ی، ھ) = ... (۳)

تھوڑی دیر کے لئے فرض کرو کہ ی اور ھ مساواتوں (۲) اور (۳) سے لا، ما کی رقوم میں معلوم کر لئے گئے ہیں اور ان قیمتوں کو ی، ھ کی بجائے (۱) میں مندرج کر دیا گیا ہے، اس طرح ء دو متبوع متغیروں لا، ما کا تفاعل بن جاتا ہے۔ فرض کرو کہ $عف_{لا}$ ء، $عف_{ما}$ ء تفاعل ء کے پہلے مشتق ہیں، اس مفروض کی بنا پر کہ اوپر کی قیمتیں مندرج کر دی گئی ہیں موڑ کی قیمت کے لئے

$عف_{لا}\,ی$ ، $عف_{ما}\,ی$ دونوں صفر ہونگے۔ اب

$$عف_{لا}\,ی = ف_{لا} + ف_{ی}\frac{جف\,ی}{جف\,لا} + ف_{ھ}\frac{جف\,ھ}{جف\,لا} \quad ....(۴)$$

اور $\frac{جف\,ی}{جف\,لا}$ ، $\frac{جف\,ھ}{جف\,لا}$ مساواتوں (۲) اور (۳) سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتے ہیں

$$فہا_{لا} + فہا_{ی}\frac{جف\,ی}{جف\,لا} + فہا_{ھ}\frac{جف\,ھ}{جف\,لا} = \quad ....(۵)$$

$$سا_{لا} + سا_{ی}\frac{جف\,ی}{جف\,لا} + سا_{ھ}\frac{جف\,ھ}{جف\,لا} = \quad ....(۶)$$

(۵) اور (۶) کو $\frac{جف\,ی}{جف\,لا}$ ، $\frac{جف\,ھ}{جف\,لا}$ کے لئے حل کرنے کی بجائے (۵) کو لہا سے (۶) کو مہا سے ضرب دو اور (۴) کے ساتھ جمع کرو، اس طرح حاصل ہوگا

$$عف_{لا}\,ی = ف_{لا} + لہا\,فہا_{لا} + مہا\,سا_{لا} + (ف_{ی} + لہا\,فہا_{ی} + مہا\,سا_{ی})\frac{جف\,ی}{جف\,لا}$$

$$+ (ف_{ھ} + لہا\,فہا_{ھ} + مہا\,سا_{ھ})\frac{جف\,ھ}{جف\,لا} \quad ....(۷)$$

اسی طرح کے عمل سے حاصل ہوگا

$$عف_{ما}\,ی = ف_{ما} + لہا\,فہا_{ما} + مہا\,سا_{ما} + (ف_{ی} + لہا\,فہا_{ی} + مہا\,سا_{ی})\frac{جف\,ی}{جف\,ما}$$

$$+ (ف_{ھ} + لہا\,فہا_{ھ} + مہا\,سا_{ھ})\frac{جف\,ھ}{جف\,ما} \quad ......(۸)$$

اب (۷) میں $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف لا}}$ کے سر (۸) میں $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ اور $\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ما}}$ کے سروں کے بالترتیب مساوی ہیں۔ ہم لہ، مہ کی قیمتیں اس طرح منتخب کرتے ہیں کہ یہ سر صفر ہوں (اور یہ بالعموم ممکن ہوگا)۔ ایسا کرنے سے عف$_{\text{لا}}$ د، عف$_{\text{ما}}$ د کے لئے جو جملے ہیں اُن میں صرف پہلی تین رقمیں رہ جاتی ہیں۔

د کے موثر کی قیمتوں کے لئے عف$_{\text{لا}}$ د، عف$_{\text{ما}}$ د صفر ہوں گے، اس لئے موثر کی قیمتوں کے لئے ذیل کی چار مساواتیں درست ہونگی

$$\left.\begin{aligned} &\text{ف}_{\text{لا}} + \text{لہ}\,\text{فہ}_{\text{لا}} + \text{مہ}\,\text{سا}_{\text{لا}} = 0 \\ &\text{ف}_{\text{ما}} + \text{لہ}\,\text{فہ}_{\text{ما}} + \text{مہ}\,\text{سا}_{\text{ما}} = 0 \\ &\text{ف}_{\text{ی}} + \text{لہ}\,\text{فہ}_{\text{ی}} + \text{مہ}\,\text{سا}_{\text{ی}} = 0 \\ &\text{ف}_{\text{ھ}} + \text{لہ}\,\text{فہ}_{\text{ھ}} + \text{مہ}\,\text{سا}_{\text{ھ}} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

یہ چار مساواتیں، (۲) اور (۳) کے ساتھ ملکر لہ اور مہ معلوم کرنے کے لئے نیز لا، ما، ی، ھ کی وہ قیمتیں معلوم کرنے کے لئے جن سے د کے موثر کی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں عین کافی ہونگی۔

مساواتیں (۹)، لا، ما، ی، ھ میں متشاکل ہیں اور یہ طریقہ خاص طور پر موزوں ہوتا ہے جبکہ ف، فہ، سا متجانس ہوں۔ یہ غیر معین ضاربوں کا طریقہ کہلاتا ہے۔ اوپر ہم نے صرف چار متغیر اور دو شرطی مساواتیں لی ہیں ظاہر ہے کہ استدلال بالکل عام ہے۔ مساواتیں (۹) بآسانی اس قاعدہ سے لکھی جاسکتی ہیں۔ مرتب کرو

فرف + لہ فرفہ + مہ فرسا اور فرلا، فرما، فری، فرھ کے سروں کو صفر کے مساوی لکھو۔

فرف سے مراد ف$_{\text{لا}}$ فرلا + ف$_{\text{ما}}$ فرما + ف$_{\text{ی}}$ فری + ف$_{\text{ھ}}$ فرھ ہے، ایسا ہی فرفہ اور فرسا کا مفہوم ہے۔

مثال ۱۔ د = لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} (۱)، فہ = الا + ب ما + ج ی ـ ک = ۰ (۲)

صریحاً د کی کم سے کم قیمت کا وجود ہے کیونکہ د لازماً مثبت ہے اور (۲) کی بنا پر لا، ما، ی ایک ساتھ صفر نہیں ہو سکتے۔ اب

فرد + لہ فرفہ = (۲لا + لہ ا) فرلا + (۲ما + لہ ب) فرما + (۲ی + لہ ج) فری

فرلا، فرما، فری کے سر صفر کرنے سے لا، ما، ی کی وہ قیمتیں جن کے لئے د اقل ہے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = -\frac{\text{لہ}}{۲} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}}$$

(۲) کی رو سے ان میں سے ہر کسر = $\frac{\text{ک}}{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} + \text{ج}^{2}}$

طالب علم اس مثال کو اس طرح سے بھی حل کر سکتا ہے کہ (۲) سے جو ی کی قیمت $\frac{(\text{ک} - \text{الا} - \text{ب ما})}{\text{ج}}$ حاصل ہوتی ہے اسکو (۱) میں پہلے درج کر لیا جائے، لیکن اس طریقہ سے جو د$_{\text{لا}}$ کی قیمت معلوم ہوگی اسکو پہلے طریقہ کے د$_{\text{لا}}$ کے ساتھ ملتبس نہ کیا جائے۔

مثال ۲۔ د کے موڑ کی قیمتیں معلوم کرو

د = ا^{2} لا^{2} + ب^{2} ما^{2} + ج^{2} ی^{2} ...... (۱)

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اس صورت میں د صرف ایک متغیر کا تفاعل ہے، غیر معین ضاربوں کا قاعدہ لگ سکتا ہے۔ جزو ضربی ۲ کو نکالنے کے لئے ضارب لہ اور ۲ مہ لو، اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{ا}^2\,\text{لا} + \text{لہ لا} + \text{مہ ل} = 0,\quad \text{ب}^2\,\text{ما} + \text{لہ ما} + \text{مہ م} = 0,\quad \text{ج}^2\,\text{ی} + \text{لہ ی} + \text{مہ ن} = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

مساواتوں (۴) میں سے پہلی کو لا سے، دوسری کو ما سے، تیسری کو ی سے ضرب دو اور جمع کرو۔
مساواتوں (۲) اور (۳) کی مدد سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}^2\,\text{لا}^2 + \text{ب}^2\,\text{ما}^2 + \text{ج}^2\,\text{ی}^2 + \text{لہ} = 0 \quad \text{یعنی} \quad \text{لہ} = -\text{د}$$

جہاں د کی یہ قیمت موڑ کی قیمت ہے کیونکہ لا، ما، ی کی قیمتیں جو (۴) سے ملتی ہیں ان سے د کی موڑ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔
(۴) میں لہ کے لئے - د لکھو، اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{لا} = \frac{\text{مہ ل}}{\text{د} - \text{ا}^2},\quad \text{ما} = \frac{\text{مہ م}}{\text{د} - \text{ب}^2},\quad \text{ی} = \frac{\text{مہ ن}}{\text{د} - \text{ج}^2}$$

اب اگر لا، ما، ی کی یہ قیمتیں (۳) میں رکھی جائیں تو جزو ضربی مہ نکل جائیگا اور د میں یہ مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی

$$\frac{\text{ل}^2}{\text{د} - \text{ا}^2} + \frac{\text{م}^2}{\text{د} - \text{ب}^2} + \frac{\text{ن}^2}{\text{د} - \text{ج}^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

(۵) کی ایک اصل د کی قیمت اعظم ہوگی اور دوسری اقل۔

مشق ۱۴

۱۔ ذیل کے متجانس تفاعلوں کے متعلق آئلر کے مسئلہ کی تصدیق کرو (صرف پہلے مشتقوں کے لئے)

(۱) $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ب}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ما}^2$ (۲) $\text{ا}\,\text{لا}^3 + \text{ب}\,\text{ما}^3 + \text{ج}\,\text{ی}^3$

(۳) $\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}} + \sqrt{\text{ی}}$ (۴) $\frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

(۵) $\frac{\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2}$ (۶) $\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ر}}{\text{ی}}\right)$ جہاں $\text{ر} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2}$

(۷) $\frac{1}{\text{ر}}$

۲۔ د، ن ویں درجہ کا متجانس تفاعل ہے، ثابت کرو کہ

(۱) $\text{لا}\,\text{د}_{\text{لالا}} + \text{ما}\,\text{د}_{\text{لاما}} = (\text{ن} - 1)\,\text{د}_{\text{لا}}$

(۲) $\text{لا}\,\text{د}_{\text{لاما}} + \text{ما}\,\text{د}_{\text{ماما}} = (\text{ن} - 1)\,\text{د}_{\text{ما}}$

۳۔ اگر ا مثبت ہو تو ثابت کرو کہ $3\,\text{ا}\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{لا}^3 - \text{ما}^3$ اعظم ہے جبکہ لا = ا، ما = ا لیکن اگر لا = ۰، ما = ۰ تو نہ یہ اقل ہے نہ اعظم۔

۴۔ تفاعل $\text{لا}^3\,\text{ما}^2\,(6 - \text{لا} - \text{ما})$ اعظم ہے جبکہ لا = ۳، ما = ۲ لیکن نہ یہ اقل ہے نہ اعظم جب، لا = ۰، ما = ۰۔

۵۔ اگر ا، ب، ج مثبت ہوں اور اگر $\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ما}} + \frac{\text{ج}}{\text{ی}} = 1$ تو ثابت کرو کہ حاصل جمع لا + ما + ی اقل ہوگا جبکہ

$$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}}} = \frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{ب}}} = \frac{\text{ی}}{\sqrt{\text{ج}}} = \sqrt{\text{ا}} + \sqrt{\text{ب}} + \sqrt{\text{ج}}$$

نیز اگر ف، ق، ط مثبت ہوں تو حاصل ضرب $\text{لا}^{\text{ف}}\ \text{ما}^{\text{ق}}\ \text{ی}^{\text{ط}}$ اقل ہے جبکہ

$$\frac{\text{ف لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ق ما}}{\text{ب}} = \frac{\text{ط ی}}{\text{ج}} = \text{ف} + \text{ق} + \text{ط}$$

۶۔ اگر $\text{ء} = \text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}$ اور اگر $\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} = ۱$ تو ء کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو اور نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

۷۔ اگر $\text{ء} = \text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲}$ اور اگر $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = ۱$ اور $\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} = ۰$ تو ء کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو اور نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

۸۔ اگر $\text{ء} = \text{لا}_{۱}^{۲} + \text{لا}_{۲}^{۲} + \text{لا}_{۳}^{۲} + \ldots + \text{لا}_{\text{ن}}^{۲}$ اور اگر $\text{ا}_{۱}\text{لا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\text{لا}_{۲} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}_{\text{ن}} = \text{ک}$ تو ء کی کم سے کم قیمت ہے

$$\frac{\text{ک}^{۲}}{\text{ا}_{۱}^{۲} + \text{ا}_{۲}^{۲} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}}^{۲}}$$

۹۔ ایک مثلث کے اضلاع ا، ب، ج ہیں اور رقبہ س ہے، اگر کسی نقطہ سے اسکے اضلاع پر عمود لا، ما، ی ہوں تو ثابت کرو کہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲}$ کی اقل قیمت $\frac{۴\,\text{س}^{۲}}{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲}}$ ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ $(\text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ب}_{۱}\text{ما} + \text{ج}_{۱})^{۲} + (\text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ب}_{۲}\text{ما} + \text{ج}_{۲})^{۲} + \ldots + (\text{ا}_{\text{ن}}\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}}\text{ما} + \text{ج}_{\text{ن}})^{۲}$

کی اقل قیمت لا، ما کی ان قیمتوں سے حاصل ہوتی ہے جو ذیل کی مساواتوں کو پورا کرتی ہیں

$$(\sum ا_1^2)\,لا + (\sum ا_1 ب_1)\,ما + (\sum ا_1 ج_1) = ۰$$

$$(\sum ا_1 ب_1)\,لا + (\sum ب_1^2)\,ما + (\sum ب_1 ج_1) = ۰$$

۱۱۔ ن نقاط معلومہ کا مرکز ہندسی وہ نقطہ ہے جس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ان نقاط سے کم سے کم ہو۔

۱۲۔ غیر معین ضاربوں کے قاعدہ سے قطع ناقص کے برپیچہ کی مساوات دریافت کرو جبکہ برپیچہ کو ناقص کے عمادوں کا لفاف تصور کیا جائے۔

عماد ہے $\dfrac{ا^2 لا}{عہ} - \dfrac{ب^2 ما}{بہ} = ا^2 - ب^2$

جہاں $\dfrac{عہ^2}{ا^2} + \dfrac{بہ^2}{ب^2} = ۱$

اس لئے $-\dfrac{ا^2 لا}{عہ^2} + لہ \dfrac{۲ عہ}{ا^2} = ۰$، $\dfrac{ب^2 ما}{بہ^2} + لہ \dfrac{۲ بہ}{ب^2} = ۰$

اسلئے $لہ = \dfrac{۱}{۲}(ا^2 - ب^2)$، $عہ^3 = \dfrac{ا^4 لا}{ا^2 - ب^2}$، وغیرہ۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ $لا\, عہ^م + ما\, بہ^م = ا^م$ کا لفاف جہاں $عہ^ن + بہ^ن = ب^ن$

$$لا^{\frac{ن}{ن-م}} + ما^{\frac{ن}{ن-م}} = \left(\frac{ا^{م+۱}}{ب^م}\right)^{\frac{ن}{ن-م}}$$ ہے۔

۵۲۔ غیر معیّن صورتیں۔ ممکن ہے کہ کوئی تفاعل ف (لا) جسکی تعیین و جہ یا دلیل کی قیمتوں کی کسی سعت کے اندر عام طور پر بخوبی ہوتی ہو

وجہ کی کسی خاص قیمت ا کے لئے ایسی شکل اختیار کرے (جیسے $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$) جو بے معنی ہو۔ لیکن ایسا ہو سکتا ہے کہ جب، لا مائل بہ ا ہو تو ف(لا) کی ایک معین انتہا ا حاصل ہو۔ ف(لا) کی قیمت لا = ا کے لئے دراصل غیر معین ہے یعنی اس کی قیمت جبر و مقابلہ کے معمولی قاعدوں سے محسوب نہیں ہو سکتی تاہم یہ عام رواج ہو گیا ہے کہ ایسی حالت میں ف(لا) کو غیر معین صورت کے نام سے موسوم کرتے ہیں اور تعریف کے طور پر انتہا ا کو ف(لا) کی قیمت خیال کرتے ہیں جبکہ لا = ا۔ تفاعل کی اس قیمت کو جو تعریف کی بنا پر اختیار کی گئی ہے ہم ف(لا) کی "اصلی قیمت" کہینگے جبکہ لا = ا۔

یاد رہے کہ یہ "اصلی قیمت" محض تعریف کی بنا پر لی گئی ہے اور اس لئے بالکل اختیاری ہے۔ لیکن اس طرز عمل میں ایک خاص فائدہ ہے، اس طرح ف(لا) جو عام طور پر قیمت ا تک مسلسل ہو بشمول قیمت ا کے مسلسل بن جاتا ہے۔

غیر معین صورتیں عام طور پر حسب ذیل ہیں:۔

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}،\ \frac{\infty}{\infty}،\ \infty - \infty،\ 0 \times \infty،\ 0^0،\ \infty^0،\ 1^\infty$$

ایسی صورتوں میں سے بعض پہلے آئی ہیں، خود ف(لا) کا مشتق بصورت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہے۔ لا لوک لا میں جبکہ لا = ۰ صورت $0 \times \infty$ پائی جاتی ہے، اصلی قیمت صفر ہے۔

لا^ن قو^لا یا $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{قو}^{\text{لا}}}$ سے جبکہ لا = +∞ ملتا ہے $0 \times \infty$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ اور انتہا صفر ہے [ملاحظہ ہو مشق ۷ سوالات ۸، ۹ حصہ اوّل]۔ یہ دیکھنا مشکل نہیں کہ نتیجہ درست رہتا ہے خواہ ن صحیح یا کسور ہو۔

صورت 1^{∞} پیدا ہوتی ہے جبکہ لا = ۰، $(1+لا)^{\frac{1}{لا}}$ میں، انتہا یا اصلی قیمت $ق$ ہے (دفعہ ۴۸ نتیجہ صریح، حصہ اول)

اکثر سوالوں میں یہ انتہائیں محض جبریہ استحالوں اور سلسلوں کے استعمال سے حاصل ہو سکتی ہیں، عام مسائل کا سرسری ذکر کرنے سے پہلے ہم اس طرح کی چند مثالیں حل کرینگے۔

مثال ۱۔ $\frac{لا^{\frac{3}{2}} - 1 + (لا-1)^{\frac{3}{2}}}{(لا^{2}-1)^{\frac{3}{2}} - لا + 1}$ جبکہ لا = ۱، صورت $\frac{صفر}{صفر}$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $(لا^{\frac{1}{2}} - 1)$ پر تقسیم کرو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ انتہا $-\frac{3}{2}$ ہے، اسلئے کسر کی "اصلی قیمت" جبکہ لا = ۱، $-\frac{3}{2}$ ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{جب^{-1} لا - لا}{لا^{3}}$ جبکہ لا = ۰، صورت $\frac{صفر}{صفر}$

$جب^{-1} لا$ کو پھیلاؤ $\left(= لا + \frac{لا^{3}}{6} + \ldots\ldots\right)$، شمار کنندہ سے لا خارج ہو جاتا ہے اور شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $لا^{3}$ پر تقسیم کرنے سے انتہا $\frac{1}{6}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۳۔ $\frac{قط\, لا}{قط\, ۳لا}$ جبکہ لا = $\frac{\pi}{2}$، صورت $\frac{\infty}{\infty}$

فرض کرو کہ لا = $\frac{\pi}{2} - ی$، تب

$$\underset{لا \to \frac{\pi}{2}}{نہا} \frac{قط\, لا}{قط\, ۳لا} = \underset{ی \to 0}{نہا} \frac{-جب\, ۳ی}{جب\, ی} = -3$$

مثال ۴۔ $\frac{1}{لا^{2}} - مم^{2} لا$ جبکہ لا = ۰، شکل $\infty - \infty$

فرض کرو کہ لا = $\frac{\pi}{2}$ - ی، تب

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{قط لا}}{\text{قط ۳ لا}} = \text{نہا}_{ی\to ۰} \frac{-\text{جب ۳ ی}}{\text{جب ی}} = -۳$$

مثال ۴- $\frac{1}{\text{لا}^2}$ - مم^2 لا جبکہ لا = ۰، شکل ∞ - ∞

$$\frac{1}{\text{لا}^2} - \text{مم}^2\text{ لا} = \left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{جب لا}}\right)\text{جم لا}\left(\frac{\text{لا}}{\text{جب لا}}\right)\left(\frac{\text{جب لا} - \text{لا جم لا}}{\text{لا}^3}\right)$$

پہلے جزو ضربی کی انتہا ۲ ہے اور دوسرے کی ۱، نیز

$$\text{جب لا} - \text{لا جم لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{6} + \ldots\ldots - \text{لا}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{2} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{\text{لا}^3}{3} + \ldots\ldots$$

یعنی تیسرے جزو ضربی کی انتہا $\frac{1}{3}$ ہے، پس مطلوبہ انتہا یا اصلی قیمت $\frac{2}{3}$ ہے

مثال ۵- لا$^{\text{لا}}$ جبکہ لا = ۰، صورت 0^0

فرض کرو کہ ی = لا$^{\text{لا}}$، تب لوک ی = لا لوک لا

لا لوک لا یا لوک ی کی انتہا صفر ہے، پس ی یا لا$^{\text{لا}}$ کی انتہا ایک ہے۔

مثال ۶- $\left(\frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{مس لا}}$ جبکہ لا = ۰، صورت ∞^0

تفاعل کا لوگارثم ہے مس لا لوک لا = - $\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ × (لا لوک لا)

جس کی انتہا صفر ہے، اسلئے تفاعل کی انتہا ۱ ہے۔

۵۳- احصائی طریقہ۔ غیر معین صورتوں کی تحقیق کے متعلق اب ہم عام مسئلہ بیان کرتے ہیں۔ ایسی نازک قیمتوں کے قرب میں ہم تفاعلوں کو

تسلیم کرلینگے۔

مسئلہ۔ اگر فا(ا) اور سا(ا) دونوں صفر ہوں یا دونوں لا تناہی اور اگر $\frac{\text{فاَ(لا)}}{\text{ساَ(لا)}}$ ایک انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا، ا کی طرف مائل ہو تو $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{سا(لا)}}$ بھی اسی انتہا کی طرف مائل ہوگا۔

تکرار سے بچنے کے لئے ابتدا ہی میں ہم اس امر کا ذکر کردیتے ہیں کہ اگر $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{سا(لا)}}$ کی صورت غیر معین ہو جبکہ لا = ا تو مسئلہ بالا سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر $\frac{\text{فاَ(لا)}}{\text{ساَ(لا)}}$ ایک انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا، ا کی طرف مائل ہو تو $\frac{\text{فاَ(لا)}}{\text{ساَ(لا)}}$ اور اسلئے $\frac{\text{فا(لا)}}{\text{سا(لا)}}$ بھی اسی انتہا کی طرف مائل ہوگا، وغیرہ وغیرہ۔

دفعہ ۲۰، حصہ اول، کے مسئلہ اوسط قیمت کی صورت ذیل کو ہم استعمال کرینگے، یہ شکل اس مسئلہ کی توسیع ہے۔

اگر فا(لا)، فاَ(لا)، سا(لا)، ساَ(لا) مسلسل ہوں سعت ا ≦ لا ≦ ب کے لئے اور اگر ساَ(لا) صفر نہ ہو جبکہ ا < لا < ب تو

$$\frac{\text{فا(ب)} - \text{فا(ا)}}{\text{سا(ب)} - \text{سا(ا)}} = \frac{\text{فاَ(لا}_1\text{)}}{\text{ساَ(لا}_1\text{)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

جہاں ا < لا$_1$ < ب [اوسط قیمت کے مسئلہ کی تعمیم شدہ صورت]

اس کا ثبوت آسان ہے، فرض کرو کہ [ملاحظہ ہو دفعہ ۴۲، حصہ اول]

فا(لا) = {فہ(لا) − فہ(ا)} − [فہ(ب) − فہ(ا)] / [سا(ب) − سا(ا)] {سا(لا) − سا(ا)}

اب فا(ا) = ۰، فا(ب) = ۰. اس لئے فاَ(لا١) = ۰، ہم ساَ(لا١) پر تقسیم کر سکتے ہیں کیونکہ ساَ(لا١) صفر نہیں ہے جب تک کہ لا١، ا اور ب کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

(۱) صورت صفر/صفر ۔ فرض کرو کہ فہ(ا) = ۰، سا(ا) = ۰، (۱) میں رکھو ب کی بجائے لا۔ تب

فہ(لا) / سا(لا) = فہَ(لا١) / ساَ(لا١)　(ا < لا١ < لا)

اور نہا (لا → ا) فہ(لا) / سا(لا) = نہا (لا١ → ا) فہَ(لا١) / ساَ(لا١) = نہا (لا → ا) فہَ(لا) / ساَ(لا)

اگر ا → ∞ تو لا کی بجائے ۱/ی رکھنے سے سوال بدل کر یہ ہو جائیگا کہ انتہا معلوم کی جائے جبکہ ی → ۰، اس لئے اس صورت میں بھی مسئلہ درست رہتا ہے۔

(۲) صورت ∞/∞ ۔ (ا) پہلے فرض کرو کہ فہ(لا)، سا(لا) دونوں مائل بہ لامتناہی ہوتے ہیں جبکہ لا مائل بہ لامتناہی ہو۔ فرض کرو کہ لا کی بہت بڑی مگر محدود قیمت ج ہے۔ (۱) میں ب کی بجائے لا اور ا کی بجائے ج رکھنے سے

[فہ(لا) − فہ(ج)] / [سا(لا) − سا(ج)] = فہَ(لا١) / ساَ(لا١)　(ج < لا١ < لا) .....(ع)

نیز ہم لکھ سکتے ہیں
[فہ(لا) − فہ(ج)] / [سا(لا) − سا(ج)] = فہ(لا) / سا(لا) × [۱ − فہ(ج)/فہ(لا)] / [۱ − سا(ج)/سا(لا)]

اس لئے (عا) کی رُو سے

$$\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})} = \frac{\text{فا}'(\text{لا}_1)}{\text{سا}'(\text{لا}_1)} \times \frac{1 - \dfrac{\text{سا}(\text{ج})}{\text{سا}(\text{لا})}}{1 - \dfrac{\text{فا}(\text{ج})}{\text{فا}(\text{لا})}}$$

اب ج کو اتنا بڑا لو کہ $\frac{\text{فا}'(\text{لا}_1)}{\text{سا}'(\text{لا}_1)}$ اور اسکی انتہا ا کا فرق بہ نسبت صہ$_1$ کے کم ہو۔ پھر ج کی یہ قیمت مقرر یا ثابت کردو، اس طرح فا(ج) اور سا(ج) اگرچہ بڑے ہیں مگر محدود ہیں۔ اس کے بعد لا کو اتنا بڑا لو (اور ایسا ممکن ہے کیونکہ فا(لا) اور سا(لا) دونوں مائل بہ لاتناہی ہوتے ہیں) کہ بائیں جانب کی دوسری کسر اور ا کا فرق مطلق صہ$_2$ سے کم ہو

اب کسر $\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})}$ دو ایسے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے پہلے کا فرق ا سے کم ہے بہ نسبت صہ$_1$ کے اور دوسرے کا فرق ا سے کم ہے بہ نسبت صہ$_2$ کے اور صہ$_1$، صہ$_2$ اتنے چھوٹے ہو سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔

اسلئے $\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})}$ کی انتہا ا ہے یعنی

$$\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} \frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{سا}(\text{لا})} = \underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} \frac{\text{فا}'(\text{لا})}{\text{سا}'(\text{لا})}$$

(ب) اسکے بعد فرض کرو کہ فا(ا)، سا(ا) دونوں مائل بہ لاتناہی ہوتے ہیں اور ا محدود ہے۔ لا کی بجائے $\text{ا} + \frac{1}{\text{ی}}$ رکھنے سے مسئلہ بالا یہ رہ جاتا ہے کہ ی ← ∞ کے لئے انتہا معلوم کیجائے، پس اس صورت میں

بھی مسئلہ درست رہتا ہے۔

اوپر کا ثبوت (Gennochi-Peano) کے احصا سے اخذ کیا گیا ہے
(جرمن ترجمہ، لیپزگ، ٹیوبنر)

(۳) **دیگر صورتیں** اگر فہ(ا) = ۰، سا(ا) = ∞ تو ہم لکھہ سکتے ہیں

$$\text{فہ}(\text{لا}) \times \text{سا}(\text{لا}) = \text{فہ}(\text{لا}) \div \frac{1}{\text{سا}(\text{لا})}$$

اس طرح یہ صورت صورت اول میں تبدیل ہو جاتی ہے۔
صورتیں 0^0، ∞^0، 1^∞ لوکارثم لینے سے تحویل ہو جاتی ہیں ملاحظہ ہو دفعہ ۵۲ مثال ۵، ۶۔
صورت ∞ - ∞ کے لئے دفعہ ۵۲ مثال ۴ کی طرح عمل کیا جا سکتا ہے۔ یا سلسلوں میں پھیلانے سے بدلی جا سکتی ہے عمل تفرق کو سلسلوں میں پھیلانے کے عمل کے ساتھ ملایا جا سکتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ن مثبت ہو تو $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ مائل بہ صفر ہوتا ہے جبکہ لا مائل بہ لاتناہی ہو۔

$$\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{-1}}{\text{ن لا}^{\text{ن}-1}} = \underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{1}{\text{ن لا}^{\text{ن}}} = 0$$

مثال ۲۔ دو متبوع متغیروں کے تفاعل $\frac{\text{لا}-\text{ما}}{\text{لا}+\text{ما}}$ کی انتہا لا ← ۰ اور ما ← ۰ کے لئے معلوم کرو۔

"اصل قیمت" کے متعلق جو تعریف ہم نے اوپر اختیار کی ہے اسکی اختیاری نوعیت کی اس مثال سے توضیح ہوتی ہے، نیز اس مثال سے واضح ہوگا کہ ایک متغیر کے تفاعل کی انتہاؤں اور دو متغیروں کے تفاعل کی انتہاؤں میں کسقدر فرق ہے

اوپر کا تفاعل کسی ایک قیمت کی طرف مائل کیا جا سکتا ہے،
دیکھو اگر ما = لہ لا اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{نہا}\ \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}} = \text{نہا}\ \frac{\text{لا} - \text{لہ لا}}{\text{لا} + \text{لہ لا}} = \frac{1 - \text{لہ}}{1 + \text{لہ}}$$

لہ کو مناسب قیمت دینے سے $\frac{1 - \text{لہ}}{1 + \text{لہ}}$ کسی عدد کے مساوی ہو سکتا ہے،
ہندسی نقطہ نظر سے، محور سے سطح ہی (لا + ما) = لا − ما پر واقع ہوتا ہے
اور جیسے لا اور ما صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں نقطہ (لا، ما، ہی) محور
ہے پر کے کسی نقطہ کے قریب لایا جا سکتا ہے۔

مشق ۱۵

سوالات ۱ تا ۱۵ میں وجہ کی معلومہ قیمتوں کے لئے تفاعلوں کی انتہائیں
("اصلی قیمتیں") دریافت کرو۔

۱۔ $\{\text{لا} - (\text{ن} + 1)\text{لا}^{\text{ن}+1} + \text{ن لا}^{\text{ن}+2}\} / (1 - \text{لا})^2$ جبکہ لا = ۱

۲۔ $\{1 - \sqrt{(1 - \text{لا}^2)}\} / \text{لا}^2$ جبکہ لا = ۰

۳۔ $\text{لا} - \sqrt{(\text{لا}^2 - 2\,\text{ا لا})}$ جبکہ لا = ∞

۴۔ $\sqrt[\text{ن}]{\{(\text{لا} + \text{ا}_1)(\text{لا} + \text{ا}_2)\ldots(\text{لا} + \text{ا}_\text{ن})\}} - \text{لا}$ جبکہ لا = ∞

رکھو لا = $\frac{1}{\text{ہی}}$ اور مسئلہ ثنائی سے پھیلاؤ۔

۵۔ $\left(1 + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{لا}^2}$ اور $\left(1 + \frac{1}{\text{لا}^2}\right)^{\text{لا}}$ جبکہ لا = ∞

۶- $\frac{\text{لوک لا}}{\text{۱ - لا}}$ اور $\frac{\text{۱ - لا + لوک لا}}{\text{۱ - }\sqrt{\text{۲لا - لا}^{\text{۲}}}}$ جبکہ لا = ۱

۷- $\frac{\text{مس لا - لا}}{\text{لا - جب لا}}$ اور $\frac{\text{مس ن لا - ن مس لا}}{\text{ن جب لا - جب ن لا}}$ جبکہ لا = ۰

۸- $\left(\frac{\pi}{\text{۲}}\text{ - لا}\right)$ مس لا اور لا مس لا - $\frac{\pi}{\text{۲}}$ قط لا جبکہ لا = $\frac{\pi}{\text{۲}}$

۹- لوک (۱ + ا لا) / لوک (۱ + ب لا) اور $\frac{\left(\text{و}^{\text{ا لا}}\text{ - و}^{\text{ب لا}}\right)}{\text{لوک (۱ + ب لا)}}$ جبکہ لا = ۰

۱۰- $\frac{\text{۱}}{\text{لا}} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}}$ لوک (۱ + لا) جبکہ لا = ۰

۱۱- $\left(\text{ا}^{\text{لا}}\text{ - ب}^{\text{لا}}\right) / \left(\text{ج}^{\text{لا}}\text{ - گ}^{\text{لا}}\right)$ جبکہ لا = ۰

۱۲- $\frac{\text{لوک مس ا لا}}{\text{لوک مس ب لا}}$ اور $\frac{\text{لوک مس ا لا - لوک مس ب لا}}{\text{لوک جب ا لا - لوک جب ب لا}}$ جبکہ لا = ۰

۱۳- $\left(\frac{\text{ا}_{\text{۱}}^{\text{لا}}\text{ + ا}_{\text{۲}}^{\text{لا}}\text{ + ا}_{\text{۳}}^{\text{لا}}\text{ + ... ا}_{\text{ن}}^{\text{لا}}}{\text{ن}}\right)^{\frac{\text{ن}}{\text{لا}}}$ جبکہ لا = ۰

۱۴- $\frac{\text{جبنر لا - جب لا}}{\text{لا}^{\text{۳}}}$ اور $\frac{\text{جمنر لا - جم لا}}{\text{لا}^{\text{۲}}}$ جبکہ لا = ۰

۱۵- $\left(\text{جم ا لا}\right)^{\text{قم}^{\text{۲}}\text{ب لا}}$ اور $\left(\text{جم ا لا}\right)^{\text{قم}^{\text{۳}}\text{ب لا}}$ جبکہ لا = ۰

۱۶- اگر ایک منحنی کی مساوات $\text{ی}_{\text{۲}}\text{ + ی}_{\text{۳}}\text{ + ی}_{\text{۴}}\text{ + ... = ۰}$ ہو جہاں $\text{ی}_{\text{۲}}$، $\text{ی}_{\text{۳}}$، $\text{ی}_{\text{۴}}$، .... متجانس تفاعل ہیں کارٹیزی محددوں میں درجہ

۲، ۳، ۴، .... ہے تو ثابت کرو کہ د = ۰ مبدأ پر کے مماسوں کی مساوات ہے جبکہ د کے اجزائے ضربی حقیقی ہوں۔

پھر لا = ر جتم طہ، ما = ر جب طہ اور فرض کرو کہ د، د، .... ہو جاتے ہیں ر د، ر د، .... چونکہ ر جزو ضربی ہے د + د .... کا اسلئے ر کی دو قیمتیں صفر ہونگی۔ اب اگر طہ کی ایسی قیمت منتخب کی جائے کہ د = ۰ تو ر کی ایک اور قیمت صفر ہوگی۔ مساوات د = ۰ جس میں طہ ہیں درجہ دوم کی مساوات ہے اس لئے جب اسکی اصلیں حقیقی اور مختلف ہوں تو دو ڈھال یا قیمتیں ملیں گی جب یہ حقیقی اور مساوی ہوں تو صرف ایک ڈھال ملیگا۔ جب اصلیں خیالی ہونگی تو مس طہ کی قیمتیں خیالی ہونگی اور مبدأ ایک اکیلا نقطہ ہوگا۔

تعریف ـ منحنی کا ایسا نقطہ جس پر منحنی کے دو الگ مماس ہوں عقدہ کہلاتا ہے۔ عقدہ پر منحنی کی دو شاخیں ایک دوسرے کو عبور کرتی ہیں اور انکے قطع کرنے سے ایک محدود زاویہ بنتا ہے۔ شکل ۸ صفحہ ۷۶ اور شکل ۱۰ صفحہ ۸۷ میں مبدأ عقدہ ہے۔

۱۷ ـ اگر لا^۴ + ۲ لا^۲ ما + ۵ لا^۳ + ۲ لا^۲ - ب^۲ ما^۲ = ۰ تو $\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}$ کی قیمت معلوم کرو جبکہ لا = ۰، ما = ۰۔

۱۸ ـ جب، لا مائل بہ لاتناہی ہو تو فہ (لا) مائل بہ صفر ہوتا ہے، ثابت کرو کہ اگر لا کے مائل بہ لاتناہی ہونے سے فہَ (لا) کسی ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہو تو یہ انتہا لازماً صفر ہوگی۔

فرض کرو کہ فہَ (لا) کی انتہا ا ہے جو صفر سے مختلف ہے، مساوات

فہ (لا) = فہ (ج) + (لا - ج) فہَ (لا۱) [ج < لا۱ < لا]

سے ظاہر ہے کہ لا کے بہت بڑا ہونے سے فہ (لا) لازماً مائل بہ لاتناہی

ہوتا ہے کیونکہ (لا − ج) فہ (لا) مائل بہ (لا − ج) ا یعنی مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے لیکن مفروض کی بنا پر فہ (لا) مائل بہ صفر ہوتا ہے پس اگر ا محدود ہے تو اسکو لازماً صفر ہونا چاہئے۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $\frac{1}{(\text{لوک } 2)^{\text{عا}}} + \frac{1}{(\text{لوک } 3)^{\text{عا}}} + \frac{1}{(\text{لوک } 4)^{\text{عا}}} + \dots$

متسع ہے عا کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے۔

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\dots$ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

ن ← ∞ کے لئے $\frac{1}{(\text{لوک ن})^{\text{عا}}} \div \frac{1}{\text{ن}}$ یعنی $(\text{ن}^{\frac{1}{\text{عا}}}/\text{لوک ن})^{\text{عا}}$

مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے [دفعہ ۵۳ مثال ۱]' اس لئے سلسلہ بعلوسہ متسع ہے چونکہ موسیقی سلسلہ متسع ہے۔ جب عا منفی ہو تو ظاہر ہے کہ سلسلہ متسع ہے۔

باب ہشتم

تفرقی مساواتیں

۵۴ - اس باب میں ہم چند تفرقی مساواتوں پر بحث کرینگے جو ابتدائی اعمال ریاضی میں استعمال ہوتی ہیں۔ اس جگہ ان کا محض مختصر سا خاکہ پیش کیا جائے گا تفصیلی بحث طالب علم کو فورساتھ کی تفرقی مساواتوں (لکملن) یا مرّے کی تفرقی مساواتوں (لونگ مین) میں ملیگی۔

معمولی تفرقی مساوات وہ مساواتی رشتہ ہے جو ایک متغیر متبوع اور ایک متغیر تابع اور تابع متغیر کے ایک یا زیادہ مشتقوں کے درمیان ہو۔

جزوی تفرقی مساوات وہ مساواتی رشتہ ہے جو دو یا زیادہ متبوع متغیروں ایک متغیر تابع اور تابع متغیر کے جزوی مشتقوں کے درمیان ہو۔

ہم یہاں صرف معمولی تفرقی مساواتوں سے بحث کرینگے۔

تفرقی مساوات کا **رتبہ** اس میں کے سب سے اعلےٰ مشتق کے رتبہ سے متعین ہوتا ہے، اور تفرقی مساوات کا درجہ اعلےٰ سے اعلےٰ مشتق کا درجہ ہے جبکہ مساوات کو کسروں سے صاف کردیا جائے اور مشتقوں کی قوتیں مثبت صحیح عدد ہوں۔

مثال لا^۲ ماً + لا ماَ + (لا^۲ - ر^۲) ما = ۰، دوسرے رتبہ کی اور درجہ اول کی تفرقی مساوات ہے۔

لا ماَ^۲ - ما ماَ + ا = ۰، رتبۂ اول اور درجہ دوم کی تفرقی مساوات ہے۔

اسقاط کے نظریہ سے ہم جانتے ہیں کہ ایک مقدار کو ۵۹ مساواتوں سے

دو مقداروں کو تین مساواتوں سے 'ن' مقداروں کو (ن + ۱) مساواتوں سے ساقط کر سکتے ہیں۔ پس اگر ایک ایسی مساوات کو جس میں لا، ما اور مستقل شریک ہوتے ہیں ایک دفعہ تفرق کیا جائے تو نئی مساوات میں لا، ما، عف ما اور مستقل شریک ہوں گے ان دو مساواتوں سے ایک مستقل ساقط ہو سکیگا۔ اس طرح اسقاط کے بعد جو مساوات حاصل ہوگی وہ رتبہ اول کی تفرقی مساوات ہوگی جس میں مفروضہ مساوات کی نسبت مستقلات کی مقدار بقدر ایک کے کم ہوگی۔

اسی طرح اگر دی ہوئی مساوات کو دو دفعہ تفرق کیا جائے تو کل تین مساواتیں حاصل ہونگی جن سے دو مستقل ساقط ہو سکینگے اور اسقاط کے بعد مساوات محصلہ دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہوگی جس میں مستقلات کی تعداد بہ نسبت اصلی مساوات کے بقدر دو کے کم ہوگی۔ وغیرہ وغیرہ۔

ہر صورت میں دی ہوئی مساوات کو محصلہ تفرقی مساوات کا کامل ابتدائی کہتے ہیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ کامل ابتدائی میں ایک، دو ...... مستقل شریک ہوتے ہیں جو متناظر تفرقی مساوات میں نہیں ہوتے جبکہ موخر الذکر بالترتیب رتبہ اول، دوم، ...... کی تفرقی مساوات ہو۔ اسقاط کے عمل میں مستقل کی قیمت خواہ یہ کچھ ہی ہو بحث میں نہیں آتی۔ ان مستقلوں کو ہم اختیاری مستقل کہینگے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے، دو بار تفرق کرنے سے

$$\text{عف ما} = ۲\,\text{ا}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$\text{عف}^2\,\text{ما} = ۲\,\text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

پہلے تفرق سے ب ساقط ہو جاتا ہے، (۲) اور (۳) سے ا ساقط ہو سکتا ہے اور یہ تفرقی مساوات ملتی ہے

$$\text{لا}\,\text{عف}^2\,\text{ما} - \text{عف ما} = ۰ \quad \ldots\ldots (۴)$$

ب کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو (۱) سے قطع مکافی تعبیر ہوتا ہے جس کا وتر خاص ا/ا ہے اور جس کا محور، محور ما پر منطبق ہوتا ہے۔ پس (۲) ایسے تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات ہے، نیز (۴) ان تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات ہے جن کے محور، محور ما پر واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات (لا-ا)² + (ما-ب)² = ج² ...(۱) ہے۔ دو دفعہ تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(لا-ا) + (ما-ب) عف ما = ۰ ....(۲)

۱ + (عف ما)² + (ما-ب) عف² ما = ۰ ....(۳)

مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے ا، ب ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ج² (عف² ما)² = {۱ + (عف ما)²}³ ....(۴)

مساوات (۴) ان سب دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کا نصف قطر ج ہے، مساوات (۲) ان دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کا مرکز (ا، ب) ہے، مساوات (۳) ان دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کے مرکز خط ما=ب پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۵۔ پورا تکملہ۔ اگر دفعہ گذشتہ کی پہلی مثال میں ہم فرض کریں کہ مساوات (۴) دی گئی ہے اور اس تفرقی مساوات سے شروع ہو کر تکمل کے عمل سے ہم (۱) حاصل کرتے ہیں تو ایسے عمل کو ہم مساوات کا تکمل کرنا یا حل کرنا کہینگے۔

اس نقطہ نظر سے (۱) کو (۴) کا کامل تکملہ (یا پورا تکملہ) کہنا زیادہ مناسب ہوگا۔ ایسی صورت میں ا، ب کو ہم تکمل کے اختیاری مستقل کہینگے۔

مساوات (۴) دوسرے رتبہ کی ہے اور (۱) میں دو اختیاری مستقل ہیں۔ تفرقی مساواتوں کی مستند کتابوں میں عام تفرقی مساوات کے پورے تکملے کے وجود کے متعلق مسائل ثابت کئے جاتے ہیں اور یہ دکھایا جاتا ہے کہ جب مساوات ن ویں رتبہ کی ہو تو اسکے پورے تکملہ میں ن اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں۔

خاص تکملہ وہ ہے جو پورے تکملہ میں ایک یا زیادہ مستقلوں کو کوئی خاص قیمت دینے سے حاصل ہو۔ مثلاً دفعہ گذشتہ مثال (۱) میں مساوات (۴) کے خاص تکملے ما = لا^۲ - ۱، ما = ۲ لا^۲ ہو سکتے ہیں۔

تفرقی مساوات کے تکمل پر غور کرنے کا ایک اور نقطہ نظر بھی ہے اور وہ یہ ہے۔

تفاعل ما معلوم کرو جو (۱) مساوات لا عف^۲ ما - عف ما = ۰ کو پورا کرے (۲) جو ب کے مساوی ہو جبکہ لا = ۱ (۳) جس کا پہلا مشتق ج ہو جبکہ لا = ۱

چونکہ پورا تکملہ ما = ا لا^۲ + ب ہے جس میں دو اختیاری مستقل ا، ب شریک ہوتے ہیں، ہم ان کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جو شرائط (۲) اور (۳) کو پورا کریں۔ ان شرائط سے حاصل ہوتا ہے

$$ب = ا ۱^۲ + ب، \quad ج = ۲ ا ۱$$

$$\text{پس}\quad ا = \frac{ج}{۲ ۱}، \quad ب = ب - \frac{۱}{۲} ۱ ج$$

تفاعل مطلوب ہے $ما = \frac{ج}{۲ ۱} لا^۲ + \frac{۲ب - ۱ج}{۲}$ جو شرائط (۱)، (۲)، (۳) کو پورا کرتا ہے۔

انہی طرح کی ایک اور مثال کے لئے ملاحظہ ہو دفعہ ۶۹ حصہ اول مثالیں ۱ اور ۲۔

طالب علم کو چاہئے کہ ذیل کی مشقیں حل کرے۔ ان میں سے کئی تفرقی مساواتیں طبیعیات

میں کثرت سے استعمال ہوتی ہیں ہر صورت میں اگر ابتدائی کو تفرقی مساوات کا تکملہ خیال کیا جائے تو یہ مساوات کا پورا تکملہ ہے۔ یہ دیکھنے میں آئیگا (ملاحظہ ہوں مثالیں ۷، ۸) کہ مختلف ابتدائیوں سے جن میں مستقل مختلف شکلوں میں واقع ہوتے ہیں ایک ہی تفرقی مساوات پیدا ہو سکتی ہے۔

مشق ۱۶

۱۔ اگر ما = ا لا + ب تو عف^{۲} ما = ۰، مساواتوں عف ما = ا، عف^{۲} ما = ۰ کی ہندسی تعبیریں بیان کرو۔

۲۔ اگر ما = ا لا$^{ن-۱}$ + ب لا$^{ن-۲}$ + ... + ک لا + ل منطق صحیح تفاعل ہو (ن − ۱) ویں درجہ کا تو ثابت کرو کہ عف^{ن} ما = ۰۔

۳۔ اگر ما = ا لا^{۲} + ب لا + ج تو عف^{۳} ما = ۰ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

۴۔ اگر ما = ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا تو

عف^{۳} (ما/لا) = ۰ یا لا^{۳} عف^{۳} ما − ۳ لا^{۲} عف^{۲} ما + ۶ لا عف ما − ۶ ما = ۰

۵۔ اگر ما = ا/لا + ب تو لا^{۲} عف^{۳} ما = − ا، عف^{۲} ما + ۲/لا عف ما = ۰

۶۔ اگر ما = ا لوک لا + ب تو لا عف ما = ا، عف^{۲} ما + ۱/لا عف ما = ۰

۷۔ اگر ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا یا اگر ما = ج جم (ن لا − ع) تو

عف^{۲} ما + ن^{۲} ما = ۰

۸۔ اگر ما = ا قو$^{ن لا}$ + ب قو$^{-ن لا}$ یا اگر ما = ج جمز ن لا + د جبز ن لا تو

عف^{۲} ما − ن^{۲} ما = ۰

۹۔ اگر ما = ا/لا + ب + لا^{۲} تو عف^{۲} ما + ۲/لا عف ما = ۶

۱۰- اگر ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا + ع جم ف لا + ق جب ف لا
جہاں ا، ب اختیاری ہیں اور ن اور ف نامساوی ہیں تو ثابت کرو کہ

عف^{۲} ما + ن^{۲} ما = (ن^{۲} - ف^{۲}) ع جم ف لا + (ن^{۲} - ف^{۲}) ق جب ف لا

۱۱- اگر ما = قو$^{-\frac{ک}{۲}لا}$ (ا جم ن لا + ب جب ن لا) تو عف^{۲} ما + ک عف ما
+ (ن^{۲} + $\frac{۱}{۴}$ ک^{۲}) ما = ۰

۱۲- اگر ما = قو$^{-\frac{ک}{۲}لا}$ (ا قو$^{ن لا}$ + ب قو$^{-ن لا}$) تو عف^{۲} ما + ک عف ما
- (ن^{۲} - $\frac{۱}{۴}$ ک^{۲}) ما = ۰

۱۳- اگر ما = ا قو$^{م لا}$ + ب قو$^{ن لا}$ تو عف^{۲} ما - (م + ن) عف ما + م ن ما = ۰

۱۴- اگر ما = (ا + ب لا) قو$^{ن لا}$ تو عف^{۲} ما - ۲ن عف ما + ن^{۲} ما = ۰
[مقابلہ کرو سوالات ۱۳ اور ۱۴ کا]

۱۵- اگر ما = (ا + ب لا) جم ن لا + (ج + د لا) جب ن لا تو
عف^{۴} ما + ۲ن^{۲} عف^{۲} ما + ن^{۴} ما = ۰

۱۶- اگر ما = (ا جم ن لا + ب جب ن لا)/لا تو
عف^{۲}(لا ما) + ن^{۲} لا ما = ۰ یا عف^{۲} ما + $\frac{۲}{لا}$ عف ما + ن^{۲} ما = ۰

۱۷- اگر ما = (ا قو$^{ن لا}$ + ب قو$^{-ن لا}$)/لا تو
عف^{۲} ما + $\frac{۲}{لا}$ عف ما - ن^{۲} ما = ۰

۱۸- اگر ما = م لا + $\frac{ا}{م}$ جہاں م اختیاری مستقل ہے تو
لا (عف ما)^{۲} - ما عف ما + ا = ۰

۱۹- اگر $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{ک}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2+\text{ک}} = ۱$ جہاں ک اختیاری مستقل ہے تو

$$\text{لا ما (حف ما)}^2 + (\text{لا}^2 - \text{ما}^2 - \text{ا}^2 + \text{ب}^2)\ \text{حف ما} - \text{لا ما} = ۰$$

ابتدائی مرکز دار مخروطیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جن سب کے ماسکے وہی ہیں [مرکز دار ہم ماسکے]

۲۰- ثابت کرو کہ دفعہ ۴۵ کی مساوات (۳۳) کا پورا تکملہ ہے

$$\text{ف (لا)} = \text{ا جب (ا جب}^{-1}\text{ لا)} + \text{ب جم (ا جب}^{-1}\text{ لا)}$$

جہاں ا، ب اختیاری مستقل ہیں۔

۵۶- رتبۂ اول اور درجۂ اول کی مساواتیں۔ اب ہم مساواتوں کے ایک دو نمونے ایسے بیان کرینگے جن کا تکمل باسانی عمل میں آسکتا ہے، بہر کیف انکا تکمل معمولی تکملوں کی قیمت دریافت کرنے کے عمل پر آکے منحصر ہو سکتا ہے۔ جہاں تک تفرقی مساواتوں کے نظریہ سے تعلق ہے اگر کسی مساوات کو ذیل کی کسی ایک صورت میں تحویل کر دیا جائے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف (لا)}،\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{فا (ما)}$$

تو ہم مساوات کو حل شدہ قرار دینگے کیونکہ اِن مساواتوں کے تکملے ہیں

$$\text{ما} = \int \text{ف (لا) فر لا} + \text{م (مستقل)}،\quad \text{لا} = \int \frac{\text{فر ما}}{\text{فا (ما)}} + \text{م (مستقل)}$$

اور اسکے بعد معمولی عمل تکمل ہے۔

نمونہ ا- متغیر جدائی پذیر۔ متغیر جدائی پذیر خیال کئے جاتے ہیں جبکہ مساوات کو اس طرح لکھنا ممکن ہو۔

$$\text{ف (لا) فر لا} + \text{فا (ما) فر ما} = ۰$$

جہاں ف (لا) صرف لا کا تفاعل ہے اور فا (ما) صرف ما کا، مساوات کا حل اِس صورت میں ہے $\int \text{ف (لا) فر لا} + \int \text{فا (ما) فر ما} = \text{م}$

مثال ۱ - ن (لا + ۱) عف ما + م (ما + ب) = ۰

یعنی ن د ما / (ما + ب) + م د لا / (لا + ۱) = ۰

اس لئے ن لوک (ما + ب) + م لوک (لا + ۱) = مستقل

یا لوک [(ما + ب)^{ن} (لا + ۱)^{م}] = مستقل

یا (ما + ب)^{ن} (لا + ۱)^{م} = مم

اوپر کی تین مساواتوں میں سے کوئی ایک تفرقی مساوات کا حل خیال کیجا سکتی ہے لیکن آخری مساوات جبریہ شکل میں ہونے کی وجہ سے زیادہ موزوں ہے۔

نمونہ ۲ - **متجانس مساواتیں** - تفرقی مساوات متجانس کہلاتی ہے اگر وہ اس شکل کی ہو

عف ما = ف (لا، ما) / فا (لا، ما)

جہاں ف (لا، ما)، فا (لا، ما) دونوں میں ایک ہی درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔

اوپر کی مساوات کو حل کرنے کے لئے متغیر تابع کی بجائے رکھو ما = و لا

مساوات ہوجاتی ہے لا عف و + و = ف (۱، و) / فا (۱، و) = فہ (و)

اب متغیر جدا ہوسکتے ہیں۔

مثال ۲ - ۲ لا ما عف ما = لا^{۲} + ما^{۲}

رکھو ما = و لا، اس طرح حاصل ہوتا ہے ۲ و لا^{۲} (لا عف و + و) = لا^{۲} (۱ + و^{۲})

جس سے د لا / لا - ۲ و د و / (۱ - و^{۲}) = ۰

اس لئے لوک {لا(ا - و۲)} = مستقل = لوک م

یا لا۲ - ما۲ = م لا ، م اختیاری مستقل ہے۔

مساوات (ا لا + ب ما + ج) عف ما = اَ لا + بَ ما + جَ کو
اس طرح متجانس بنا سکتے ہیں۔ رکھو ضا = ا لا + ب ما + ج } بشرطیکہ
عا = اَ لا + بَ ما + جَ }
ا بَ - اَ ب صفر نہ ہو [دیکھو مشق ۷ ا سوال ۳ "]

نمونہ ۳ — خطی مساواتیں۔ تفرقی مساوات خطی کہلاتی ہے جبکہ متغیر تابع
اور اسکے مشتقات جو اس میں شریک ہوں سب درجہ اول کے ہوں۔
پس رتبہ اول کی خطی مساوات اس شکل کی ہوگی

عف ما + ف ما = ق

جہاں ف اور ق صرف لا کے تفاعل (یا مستقل) ہیں۔

فرض کرو کہ ف۱ = ∫ ف ء لا ، مساوات کو و^ف۱ سے ضرب دو

اب چونکہ عف و^ف۱ = و^ف۱ عف ف۱ = و^ف۱ × ف

اس لئے حاصل ہوتا ہے و^ف۱ عف ما + و^ف۱ ف ما = عف (و^ف۱ ما)

اسلئے عف (و^ف۱ ما) = و^ف۱ ق

اسلئے و^ف۱ ما = ∫ و^ف۱ ق ء لا + م

نتیجہ صریح۔ مساوات عف ما + ف ما = ق ما^ن خطی مساوات کی
صورت میں لائی جا سکتی ہے اگر ہم رکھیں و = ما^(-ن+۱) اور و کو متغیر تابع

فرض کریں۔

مثال ۳۔ $(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\, \text{عف ما} + \text{لا ما} = \text{ا لا}$

یہاں
$$\text{عف ما} + \frac{\text{لا}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}\,\text{ما} = \frac{\text{ا لا}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$$

اور
$$\text{ف}_{\text{۱}} = \int \frac{\text{لا ولا}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لوک}\,(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}) = \text{لوک}\,\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$$

$$\text{و}^{\text{ف}_{\text{۱}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$$

اسلئے
$$\text{ما} \times \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}} = \int \frac{\text{ا لا ولا}}{(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}} + \text{م} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}} + \text{م}$$

پس
$$\text{ما} = \text{ا} + \text{م}\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$$

مثال ۴۔ قوت لا کی ایک برقی رو ایک ایسے دورہ میں بہ رہی ہے جسکی امالیت ل ہے اور مزاحمت ز، برقی رو پر بیرونی قوت محرکہ برق م عمل کرتی ہے، رو کی مساوات وقت ت پر ہوگی

$$\text{ل}\,\dot{\text{لا}} + \text{ز لا} = \text{م}$$

پہلے فرض کرو کہ م مستقل ہے اور مساوی ہے $\text{م}_{\text{۱}}$ کے، نیز ل اور ز مستقل ہیں

$$\dot{\text{لا}} + \frac{\text{ز}}{\text{ل}}\,\text{لا} = \frac{\text{م}_{\text{۱}}}{\text{ل}}$$

اسلئے
$$\text{و}^{\frac{\text{زت}}{\text{ل}}}\,\text{لا} = \frac{\text{م}_{\text{۱}}}{\text{ل}} \int \text{و}^{\frac{\text{زت}}{\text{ل}}}\,\text{وت} + \text{م} = \frac{\text{م}_{\text{۱}}}{\text{ز}}\,\text{و}^{\frac{\text{زت}}{\text{ل}}} + \text{م}$$

اور
$$\text{لا} = \frac{\text{م}_{\text{۱}}}{\text{ز}} + \text{م}\,\text{و}^{-\frac{\text{زت}}{\text{ل}}}$$

جب $ت = ۰$، $لا = ۰$۔ اور اس لئے $م = - \frac{م_۱}{ز}$

اسلئے $لا = \frac{م_۱}{ز} \left(۱ - و^{-\frac{زت}{ل}} \right)$

اس میں $\frac{م_۱}{ز} و^{-\frac{زت}{ل}}$ زائد یا امالہ شدہ (Induced) رو ہے جو معدوم ہو جاتی ہے جیسے کل رو اپنی قائم قیمت $\frac{م_۱}{ز}$ حاصل کر لیتی ہے۔

اسکے بعد فرض کرو کہ $م = م_۱ جم (ف ت - ع_۱)$

اب چونکہ $\int و^{\frac{زت}{ل}} جم (ف ت - ع_۱) ف ت = \frac{ل و^{\frac{زت}{ل}}}{ز^۲ + ف^۲ ل^۲} \left[ز جم (ف ت - ع_۱) + ف ل جب (ف ت - ع_۱) \right]$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $لا = م و^{-\frac{زت}{ل}} + \frac{م_۱}{ز^۲ + ف^۲ ل^۲} \left[ز جم (ف ت - ع_۱) + ف ل جب (ف ت - ع_۱) \right]$

جیسے $ت$ بڑھتا ہے رقم $م و^{-\frac{زت}{ل}}$ کے قابل لحاظ ہونے کی اہمیت کم ہوتی جاتی ہے اور دوسری رقم سے قائم اہتزاز حاصل ہوتا ہے، قائم اہتزاز کو اس شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$لا = \frac{م_۱}{\sqrt{ز^۲ + ف^۲ ل^۲}} جم (ف ت - ع_۱ - ع_۲)$$

جہاں مس $ع_۲ = \frac{ف ل}{ز}$، مقدار $\sqrt{ز^۲ + ف^۲ ل^۲}$ کو حلقہ کی متفاوست (Impendance) کہتے ہیں۔

نمونہ ۴ - حاضر مساواتیں - مساوات

م + ن عف ما = ٠ یا م فر لا + ن فر ما = ٠

کو حاضر یا ٹھیک مساوات کہینگے جبکہ م، ن، لا اور ما کے تفاعل ہوں اور م فر لا + ن فر ما ۔ پورا تفرقہ ہو یعنی جف م / جف ما = جف ن / جف لا (دفعہ ۹ حصہ اول)

ایسی صورت میں ایک تفاعل ع ایسا موجود ہے کہ فر ع = م فر لا + ن فر ما اور مساوات کا تکملہ ہے ع = مستقل۔

مثال ۵ - ۲ لا ما - ما^2 + ۲ لا + (لا^2 - ۲ لا ما + ۲ ما) عف ما = ٠

یہاں م = ۲ لا ما - ما^2 + ۲ لا، ن = لا^2 - ۲ لا ما + ۲ ما

اور جف م / جف ما = ۲ لا - ۲ ما = جف ن / جف لا

پس معلوم ہوا کہ یہ مساوات حاضر یا تیار مساوات ہے۔ اسلئے ہم مساوات کو کامل تفرقوں کے مجموعہ کے طور پر ترتیب دے سکتے ہیں۔

یعنی (۲ لا ما فر لا + لا^2 فر ما) - (ما^2 فر لا + ۲ لا ما فر ما) + ۲ لا فر لا + ۲ ما فر ما

یعنی فر (لا^2 ما) - فر (لا ما^2) + فر (لا^2) + فر (ما^2)

پس ع = لا^2 ما - لا ما^2 + لا^2 + ما^2

اور تکملہ ہے لا^2 ما - لا ما^2 + لا^2 + ما^2 = ق (مستقل)

مثال ۶ - لا^3 - ۲ ما^2 + ۲ لا ما عف ما = ٠

یہ حاضر مساوات نہیں ہے لیکن اگر اسے ۱ / لا^3 سے ضرب دیدیا جائے تو یہ حاضر مساوات ہو جائیگی،

(لا^3 - ۲ ما^2) / لا^3 + (۲ ما / لا^2) عف ما = عف ((لا^3 + ما^2) / لا^2)

تکملہ ہے $\frac{\text{لا}^{3}+\text{ما}^{2}}{\text{لا}^{2}}=\text{ق}$ یا $\text{لا}^{3}+\text{ما}^{2}=\text{ق}\,\text{لا}^{2}$ جہاں ق مستقل ہے

جزوِ ضربی $\frac{1}{\text{لا}^{2}}$ کو جسکے ساتھ ضرب دینے سے مساوات حاضر بن جاتی ہے **متکمل جزوِ ضربی** کہتے ہیں۔ جب کوئی مساوات حاضر نہ ہو تو کوئی ایسا متکمل جزوِ ضربی بھانپ لینے سے مساوات حاضر بن جاتی ہے اور تکمل ہو سکتی ہے۔

۵۷ — مساواتیں جو رتبہ اول کی ہیں لیکن درجہ اول کی نہیں۔ عف ما کو ع سے تعبیر کرو، اگر مساوات ن ویں درجہ کی ہو تو یہ اس کی شکل ہوگی

$$\text{ا}\,\text{ع}^{\text{ن}}+\text{ب}\,\text{ع}^{\text{ن}-1}+\ldots\ldots+\text{ط}\,\text{ع}+\text{ل}=\cdot\ \ldots\ldots\ (1)$$

جہاں ا، ب، ...... لا، ما کے تفاعل ہیں یا مستقل ہیں۔
اگر ممکن ہو تو ع کے لئے حل کرو، عام طور پر ع کی ن قیمتیں ہونگی

$$\text{ع}=\text{ع}_{1}،\ \text{ع}=\text{ع}_{2}،\ \ldots\ldots\ldots$$

اور ان میں سے ہر ایک مساوات کو تکمل کرنے سے جو رشتہ حاصل ہوگا وہ (۱) کو پورا کریگا۔

مثال ۱- $\text{لا}\,\text{ما}\,\text{ع}^{2}-(\text{لا}^{2}+\text{ما}^{2})\,\text{ع}+\text{لا}\,\text{ما}=\cdot$

اسلئے $\text{ع}=\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ یا $\text{ع}=\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$

اور ان مساواتوں کے تکملے ہیں $\text{ما}=\text{ص}\,\text{لا}$، $\text{ما}^{2}-\text{لا}^{2}=\text{س}$ جہاں ص اور س مستقل ہیں۔

مثال ۲- کلیروی مساوات $\text{ما}=\text{لا}\,\text{ع}+\text{ف}(\text{ع})\ \ldots\ldots\ (1)$
یہ خاص صورت کی مساوات ہے، اس کو اس طرح تکمل کرتے ہیں۔
(۱) کو بلحاظ لا کے تفرق کرو، حاصل ہوگا

ع = ع + لا (فرع/فرلا) + فَ (ع) (فرع/فرلا)

یا {لا + فَ (ع)} (فرع/فرلا) = ۰ .... (۲)

پس (فرع/فرلا) = ۰ یعنی ع = مستقل = ج

لا + فَ (ع) = ۰ .... (۳)

(۱) ع کے لئے مندرج کرنے سے پورا تکملہ حاصل ہوتا ہے

ما = ج لا + ف (ج) .... (۴)

علاوہ اسکے اگر (۱) اور (۳) سے ع ساقط کر دیا جائے تو لا اور ما میں رشتہ حاصل ہوگا جو (۱) کو پورا کریگا، یہ رشتہ (۴) میں ج کو کوئی خاص قیمت دینے سے حاصل نہیں ہوسکتا اسکو ہم مساوات کا نادر حل کہینگے۔

دراصل نادر حل خطوط کے قبیل (۴) کا لفاف ہے، کیونکہ اگر ہم (۴) اور لا + فَ (ج) = ۰ سے ج کو ساقط کریں تو صریحاً لا، ما میں وہی رشتہ حاصل ہوگا جسے نادر حل کہتے ہیں (صرف ج اور ع کا تبادلہ کر دیا گیا ہے) اور دفعہ ۳۶ میں ہم نے دیکھا ہے کہ لفاف کا ڈھال وہی ہوتا ہے جو کہ قبیل (۴) کے منحنیوں کا ان کے انتہائی نقاط تقاطع پر۔

مثال کے طور پر ما = لا ع + ۱/ع کا پورا تکملہ

ما = ج لا + ۱/ج ہے

اور نادر حل　ما² = ۴ لا

۵۸۔ رتبہ دوم کی مساواتیں۔

نمونہ ۱۔ عفا² ما = ف (لا) جو صرف لا کا تفاعل ہے۔

بلحاظ لا کے دو بار تکمل کرو، دو اختیاری مستقل شریک ہونگے۔

نمونہ ۲۔ عف^۲ ما = ف (ما) صرف ما کا تفاعل۔

عف ما کے ساتھ ضرب دو۔ تب چونکہ عف ما عف^۲ ما = عف [$\frac{۱}{۲}$ (عف ما)^۲]

$\frac{۱}{۲}$ (عف ما)^۲ = ∫ ف (ما) عف ما و لا + م (مستقل) = ∫ ف (ما) و ما + م

اب یہ رتبۂ اول کی مساوات ہے، ممکن ہے کہ یہ آگے متکمل ہو سکے۔

مثال ۱۔ طول ل کے سادہ رقاص کی حرکت کی مساوات ہے

ل طہ̈ = ‒ج جب طہ، تکمل کرنے کی غرض سے طہ̇ کے ساتھ ضرب دو، حاصل ہوگا

$\frac{۱}{۲}$ ل (طہ̇)^۲ = ج جم طہ + م جہاں م مستقل ہے۔

جب ت = ۰ تو فرض کرو کہ طہ = عہ اور طہ̇ = ۰

اس طرح م = ‒ج جم عہ

اور طہ̇ = ‒ $\sqrt{\frac{۲ج}{ل}}$ $\sqrt{\text{جم طہ} - \text{جم عہ}}$ = ‒۲ $\sqrt{\frac{ج}{ل}}$ $\sqrt{\text{جب}^۲ \frac{\text{عہ}}{۲} - \text{جب}^۲ \frac{\text{طہ}}{۲}}$

علامت جذر کے پہلے منفی علامت لی گئی ہے کیونکہ ت کے بڑھنے سے طہ گھٹتا ہے

اب رکھو جب $\frac{\text{طہ}}{۲}$ = جب $\frac{\text{عہ}}{۲}$ جب فہ، تحویل کے بعد

$$\frac{\text{و ت}}{\text{و فہ}} = -\sqrt{\frac{ل}{ج}} \times \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{جب}^۲ \frac{\text{عہ}}{۲} \text{جب}^۲ \text{فہ}}}$$

ابتدائی تفاعلوں کے واسطہ سے یہ تکمل عمل میں نہیں آسکتا، لیکن ت کو ایک لامتناہی سلسلہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ ت کی قیمت چوتھائی مدت دوران کے لئے ہے $\frac{\pi}{۲}$ $\sqrt{\frac{ل}{ج}}$ [دفعہ ۷۴، مثال ۳] عام طور پہ

$$\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ق فہ}}{\sqrt{1 - \text{جب}^2 \frac{\text{عہ}}{2}\, \text{جب}^2 \text{فہ}}}$$

نمونہ ۳۔ $\text{عف}^2 \text{ما} = \text{ف} (\text{عف ما})$ جو صرف عف ما کا تفاعل ہے۔
فرض کرو کہ $\text{عف ما} = \text{و}$، حاصل ہوگا $\text{عف و} = \text{ف} (\text{و})$، اس سے و معلوم کرنا ممکن ہے، اسکے بعد ما معلوم ہوسکتا ہے۔

مثال ۲۔ مساوات $\text{ج عف}^2 \text{ما} = \left\{ 1 + (\text{عف ما})^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{ج و}}{\sqrt{1 + \text{و}^2}} + \text{ا} \ (\text{مستقل})$$

$$\text{عف ما} = \text{و} = \pm \frac{(\text{لا} - \text{ا})}{\sqrt{\left\{ \text{ج}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2 \right\}}}$$

$$\text{ما} = \mp \sqrt{\left\{ \text{ج}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2 \right\}} + \text{ب} \ (\text{مستقل})$$

$$\text{یا} \quad (\text{لا} - \text{ا})^2 + (\text{ما} - \text{ب})^2 = \text{ج}^2$$

۵۹۔ خطی مساواتیں۔ رتبۂ دوم کے نمونہ کی خطی مساوات یہ ہے

$$\text{عف}^2 \text{ما} + \text{ط عف ما} + \text{ق ما} = \text{ر} \quad \ldots\ldots (1)$$

جہاں ط، ق، ر صرف لا کے تفاعل ہیں (یا مستقل ہیں)
تمام خطی مساواتوں کا پورا تکملہ دو تفاعلوں کا حاصل جمع ہوتا ہے
(۱) متمم تفاعل (م، ف) جو اوپر کی مساوات (۱) کا پورا تکملہ ہو جبکہ ر (یا عام طور پر وہ رقم جو ما اور اسکے مشتقوں پر منحصر نہ ہو) صفر ہو۔ اس تفاعل میں دو (اور ن ویں رتبہ کی مساوات میں ن) اختیاری مستقل ہونگے۔
(۲) خاص تکملہ (خ، ت) جو پوری مساوات (۱) کا حل ہو جیسے یہ اوپر مندرج ہے یعنی جبکہ اسکے دائیں بائیں جانب کے رکن دونوں برقرار رکھے جائیں۔ اس تفاعل

میں اختیاری مستقل نہیں واقع ہونگے۔
ہم ذیل کا مسئلہ صرف رتبہ دوم کی مساواتوں کے لئے ثابت کرتے ہیں، لیکن استدلال عام ہے۔ ن' ویں رتبہ کی مساوات کے لئے ع' و کی طرح کے ن تفاعل ہونگے' ورحل میں ن اختیاری مستقل شریک ہونگے۔
اگر ما = ع اور ما = و مساوات ذیل کو پورا کریں
عف² ما + ط عف ما + ق ما = ... (۲)
تو ا ع + ب و بھی پورا کریگا' ا' ب اختیاری مستقل ہیں۔
کیونکہ اگر عف² ع + ط عف ع + ق ع = ۰ اور عف² و + ط عف و + ق و =
تو عف² (ا ع + ب و) + ط عف (ا ع + ب و) + ق (ا ع + ب و) =
یعنی ا ع + ب و مساوات (۲) کو پورا کرتا ہے۔
اب اگر ما = ھ خاص تکملہ ہو یعنی اگر ھ مساوات (۱) کو پورا کرے اور ا ع + ب و متمم تفاعل ہو تو ا ع + ب و + ھ مساوات (۱) کو پورا کریگا
کیونکہ اگر ما = ا ع + ب و + ھ تو
عف² ما + ط عف ما + ق ما = عف² (ا ع + ب و) + ط عف (ا ع + ب و)
+ ق (ا ع + ب و) + عف² ھ + ط عف ھ + ق ھ
= صفر + ر [کیونکہ بائیں جانب کا پہلا حصہ صفر کے مساوی ہے اور ھ مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے اسلئے دوسری سطر ر ہے]
پس ما کی یہ قیمت (۱) کو پورا کرتی ہے اور چونکہ اس میں دو مستقل ہیں یہ جملہ مساوات (۱) کا پورا تکملہ ہے۔
اس جگہ ہم صرف اُن مساواتوں پر غور کرینگے جن میں ط اور ق محض مستقل ہیں

۶۰ ـ متمم تفاعل ـ ذیل کی مساوات کو تکمل کرنا ہے۔

عف² ما + ا عف ما + ب ما = ۰ .... (۳)

(۱) فرض کرو کہ ما = قو^{لمالا} (لما مستقل)، تب

(لما² + ا لما + ب) قو^{لمالا} = ۰

پس اگر لما ذیل کی معاون مساوات کی اصل ہو تو

لما² + ا لما + ب = ۰ .... (۴)

تو قو^{لمالا} مساوات (۳) کو پورا کریگا۔ (۴) کی دو اصلیں لما₁، لما₂ ہیں

لما₁ = - ا/۲ + √(۱/۴ ا² - ب)، لما₂ = - ا/۲ - √(۱/۴ ا² - ب)

اور قو^{لما₁لا}، قو^{لما₂لا} مساوات (۳) کے دو حل ہیں۔

پس (۳) کا پورا تکملہ ہے

ما = **ا** قو^{لما₁لا} + **ب** قو^{لما₂لا} = قو^{- ا/۲ لا} (**ا** قو^{ن لا} + **ب** قو^{-ن لا})

جہاں ن = √(۱/۴ ا² - ب) .... (۵)

اب ہم خاص صورتوں پر غور کرتے ہیں۔

(۲) اگر ا² = ۴ ب تو مساوات (۴) کی دونوں مساوی اصلیں ہونگی یعنی

لما₁ = لما₂ = - ا/۲ ایسی حالت میں مساوات (۵) ہو جائیگی

ما = (**ا** + **ب**) قو^{- ½ ا لا}

اور اس میں اختیاری مستقل صرف ایک ہے کیونکہ **ا** + **ب** کی بجائے ہم

ج لکھ سکتے ہیں۔ جب، ا² = ۴ ب تو فرض کرو کہ ما = قو^{- ½ ا لا} ع اور مساوات

(۳) ہو جاتی ہے جزو ضربی قو^{- ½ ا لا} کو نظر انداز کرنے سے

عفا^۲ ع = ۰، جس کا پورا تکملہ ع = ا + ب لا

پس (۳) کا پورا تکملہ اِس صورت میں جبکہ معاون مساوات کی اصلیں مساوی ہوں، ہر ایک = − $\frac{ا}{۲}$ یہ ہے

$$ما = (ا + ب لا) \ قو^{-\frac{ا}{۲} لا} \quad \ldots\ldots (۶)$$

(۳) اگر ا^۲ < ۴ ب تو (۴) کی اصلیں خیالی ہیں۔ پھر فرض کرو کہ

ما = قو$^{-\frac{ا}{۲} لا}$ ع اور مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$عفا^۲ ع + م^۲ ع = ۰ \quad \ldots\ldots (۷)$$

جہاں $\frac{ا}{۴}$ ا^۲ − ب = − م^۲ اور م حقیقی ہے۔

اب ع = جم م لا، ع = جب م لا دونوں (۷) کو پورا کرتے ہیں، پس اسکا پورا تکملہ ہے

$$ع = ا \ جم \ م لا + ب \ جب \ م لا$$

اور (۳) کا پورا تکملہ جبکہ ا^۲ < ۴ ب یہ ہے

$$ما = قو^{-\frac{ا}{۲} لا} ع = قو^{-\frac{ا}{۲} لا} (ا \ جم \ م لا + ب \ جب \ م لا) \ldots (۸)$$

اب ہم دیکھینگے کہ (۵) اور (۸) کس طرح لکھے جا سکتے ہیں جبکہ (۴) کی اصلیں معلوم ہوں، فرض کرو کہ خ حسب معمول $\sqrt{-1}$ کو تعبیر کرتا ہے، (۴) کی اصلیں جب حقیقی ہوں تو رکھو $\frac{ا^۲}{۴}$ − ب = ن^۲، اصلیں اس حالت میں ہونگی۔

$$-\frac{ا}{۲} + ن، \ -\frac{ا}{۲} - ن$$

اور حل ہے ما = قو$^{-\frac{ا}{۲} لا}$ (ا قو$^{ن لا}$ + ب قو$^{-ن لا}$)

اگر (۴) کی اصلیں خیالی ہوں تو رکھو $\frac{ا^۲}{۴}$ − ب = − ن^۲

اور اصلیں ہیں – $\frac{1}{2}$ + ن خ، – $\frac{1}{2}$ – ن خ

اور حل ہے ما = قو$^{-\frac{لا}{۲}}$ (ا جم ن لا + ب جب ن لا)

گویا قو$^{خ ن لا}$، قو$^{-خ ن لا}$ کی بجائے ہم رکھتے ہیں جم ن لا، جب ن لا۔
یہ قابل توجہ ہے کہ معاون مساوات عف کی بجائے لم رکھنے اور ما کو نکال دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۱ – عف^2 ما + ۷ عف ما – ۸ ما = ۰
معاون مساوات لم^2 + ۷ لم – ۸ = ۰، لم$_1$ = ۱، لم$_2$ = –۸

حل ما = ا قو^{لا} + ب قو$^{-۸ لا}$

مثال ۲ – عف^2 ما + ۲ عف ما + ۱۰ ما = ۰
معاون مساوات لم^2 + ۲ لم + ۱۰ = ۰، لم$_1$ = –۱ + ۳خ، لم$_2$ = –۱ – ۳خ

حل ما = قو$^{-لا}$ (ا جم ۳ لا + ب جب ۳ لا)

مثال ۳ – عف^4 ما – ۲ عف^3 ما + ۵ عف^2 ما – ۸ عف ما + ۴ ما = ۰
معاون مساوات لم^4 – ۲ لم^3 + ۵ لم^2 – ۸ لم + ۴ = ۰
لم$_1$ = ۱ = لم$_2$، لم$_3$ = ۲خ، لم$_4$ = –۲خ

مساوی اصلوں لم$_1$، لم$_2$ سے ملتا ہے (ا + ب لا) قو^{لا}، خیالی اصلوں ۲خ، –۲خ سے ج جم ۲ لا + د جب ۲ لا، پس

ما = (ا + ب لا) قو^{لا} + ج جم ۲ لا + د جب ۲ لا

۶۱ – **خاص تکملہ** – نہایت مشہور عملی طور پر کارآمد صورتیں وہ ہیں جن میں اس طرح کی رقموں ل قو$^{عم لا}$، ل جب عم لا، ل جم عم لا کا

مجموعہ ہو۔ خاص تکملہ معلوم کرنے کا آسان طریقہ ابدال کا ہے۔ مساوات (۱) اب ہے

عف² ما + ا عف ما + ب ما = ر .... (۹)

صورت اول۔ ر = ل و^عہ لا، فرض کرو کہ ما = ج و^عہ لا، ہم ج کی ایسی قیمت معلوم کرتے ہیں کہ مساوات (۹) پوری ہو جائے۔ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ج (عہ² + ا عہ + ب) و^عہ لا = ل و^عہ لا

پس ج و^عہ لا مساوات کو پورا کریگا اگر ج = ل / (عہ² + ا عہ + ب)

لیکن اسکی مستثنٰے صورتیں ہیں

صورت اول (۱) اگر عہ معاون مساوات (۴) کی اصل ہو تو

عہ² + ا عہ + ب = ۰

اور ج کی قیمت لامتناہی ہوگی، اس حالت میں ج لا و^عہ لا مندرج کرکے دیکھو اگر عہ معاون مساوات کی اکہری اصل ہو اور ج لا² و^عہ لا کرکے دیکھو اگر عہ دوہری اصل ہو۔

مثال ۱۔ عف² ما - ۲ عف ما + ما = و^لا + و^۲لا

معاون مساوات لہ² - ۲ لہ + ۱ = ۰۔ لہ = ۱، دو دفعہ

خاص تکملہ معلوم کرنے کے لئے و^لا، و^۲لا کے ساتھ الگ الگ عمل کرکے دیکھو۔ چونکہ ا معاون مساوات کی دوہری اصل ہے، اس لئے و^لا کے جواب میں خاص تکملہ معلوم کرنے کے لئے آزمائشی حل ج لا² و^لا ہو اور و^۲لا کے لئے د و^۲لا۔ پس رکھو ما = ج لا² و^لا + د و^۲لا

مساوات ہوجاتی ہے ۲ ج و^لا + د و^۲لا = و^لا + و^۲لا

جس سے $\text{ج} = \frac{۱}{۲}$، $\text{د} = ۱$، اسلیے

$$\text{خاص تکملہ} = \frac{۱}{۲}\,\text{لا}^{۲}\,\text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{۲\text{لا}}$$

$\text{قو}^{۲\text{لا}}$ کے جواب میں خاص تکملہ کا جو حصہ ہے وہ صورت اول کے بلاواسطہ استعمال سے حاصل ہو سکتا ہے۔ پورا تکملہ ہے متمم تفاعل + خاص تکملہ

$$= (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا})\,\text{قو}^{\text{لا}} + \frac{۱}{۲}\,\text{لا}^{۲}\,\text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{۲\text{لا}}$$

صورت دوم ۔ $\text{ی} = \text{ل}\,\text{جب}\,\text{عہ}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{جم}\,\text{عہ}\,\text{لا}$

آزمایشی حل اس صورت میں لو

$$\text{ی} = \text{د}\,\text{جب}\,\text{عہ}\,\text{لا} + \text{ف}\,\text{جم}\,\text{عہ}\,\text{لا}$$

مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(-\text{عہ}^{۲}\text{د} - \text{ا}\,\text{عہ}\,\text{ف} + \text{ب}\,\text{د})\,\text{جب}\,\text{عہ}\,\text{لا} + (-\text{عہ}^{۲}\text{ف} + \text{ا}\,\text{عہ}\,\text{د} + \text{ب}\,\text{ف})\,\text{جم}\,\text{عہ}\,\text{لا}$$
$$= \text{ل}\,\text{جب}\,\text{عہ}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{جم}\,\text{عہ}\,\text{لا}$$

اور مساوات پوری ہوگی اگر

$$(\text{ب} - \text{عہ}^{۲})\,\text{د} - \text{ا}\,\text{عہ}\,\text{ف} = \text{ل}،\quad \text{ا}\,\text{عہ}\,\text{د} + (\text{ب} - \text{عہ}^{۲})\,\text{ف} = \text{م}$$

$$\text{یا}\ \text{د} = \frac{(\text{ب} - \text{عہ}^{۲})\,\text{ل} + \text{ا}\,\text{عہ}\,\text{م}}{(\text{ب} - \text{عہ}^{۲})^{۲} + \text{ا}^{۲}\,\text{عہ}^{۲}}،\quad \text{ف} = \frac{-\text{ا}\,\text{عہ}\,\text{ل} + (\text{ب} - \text{عہ}^{۲})\,\text{م}}{(\text{ب} - \text{عہ}^{۲})^{۲} + \text{ا}^{۲}\,\text{عہ}^{۲}}$$

اگر $\text{ا} = ۰$ تو حاصل ہوتا ہے $\text{د} = \frac{\text{ل}}{\text{ب} - \text{عہ}^{۲}}$، $\text{ف} = \frac{\text{م}}{\text{ب} - \text{عہ}^{۲}}$

لیکن یہ حل ناکام رہتا ہے اگر $\text{عہ}^{۲} = \text{ب}$ یعنی جب متمم تفاعل $\text{ا}\,\text{ل}\,\text{جم}\,\text{عہ}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{جب}\,\text{عہ}\,\text{لا}$ ہو۔ ایسی حالت میں

صورت دوم (ا) اگر $\text{ا} = ۰$ اور $\text{عہ}^{۲} = \text{ب}$ تو آزمائش سے معلوم ہوگا کہ

$$\text{خاص تکملہ} = -\frac{\text{ل}}{۲\text{عہ}}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{عہ}\,\text{لا} + \frac{\text{م}}{۲\text{عہ}}\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{عہ}\,\text{لا}$$

جہاں ی = ل جب عم لا + م جم عم لا

مثال ۲۔ مساوات لا̈ + ک لا̇ + مم لا = ا جم (ن ت - عم) ....(۱)

حرکی اور برقی نظریہ میں نمونہ کی مساوات ہے۔

متمم تفاعل معلوم کرنا آسان ہے۔ خاص تکملہ معلوم کرنے کے لئے آزمائش کے طور پر رکھو

لا = د جم (ن ت - عم) + ف جب (ن ت - عم) ....(۲)

(۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

(- ن² د + ک ن ف + مم د) جم (ن ت - عم)

+ (- ن² ف - ک ن د + مم ف) جب (ن ت - عم)

= ا جم (ن ت - عم)

پس (۱) پوری ہوگی اگر

(مم - ن²) د + ک ن ف = ا ، - ک ن د + (مم - ن²) ف = ۰

$$\text{اسلئے د} = \frac{\text{(مم - ن}^2\text{) ا}}{\text{(مم - ن}^2\text{)}^2 + \text{ک}^2\text{ ن}^2} \text{، ف} = \frac{\text{ک ن ا}}{\text{(مم - ن}^2\text{)}^2 + \text{ک}^2\text{ ن}^2}$$

$$\text{اس لئے خاص تکملہ} = \frac{\text{ا\{(مم - ن}^2\text{) جم (ن ت - عم) + ک ن جب (ن ت - عم)\}}}{\text{\{(مم - ن}^2\text{)}^2 + \text{ک}^2\text{ ن}^2\text{\}}}$$

$$= \frac{\text{ا جم (ن ت - عم - عم}_1\text{)}}{\sqrt{\text{(مم - ن}^2\text{)}^2 + \text{ک}^2\text{ ن}^2}} \text{ جہاں مس عم}_1 = \frac{\text{ک ن}}{\text{مم - ن}^2}$$

اگر ک = ۰ اور ن² = مم تو صورت دوم (ا) پیدا ہوتی ہے، اس حالت میں

$$\text{خاص تکملہ} = \frac{\text{ا}}{\text{۲ن}} \text{ ت جب (ن ت - عم)}$$

صورت سوم۔ اگر ی، لا کا منطق صحیح تفاعل ہو تو امتحان کے طور پر لا کے لئے ایک منطق صحیح تفاعل رکھ کر دیکھو، سروں کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں کہ تفاعل مساوات کو پورا کرے۔

۶۲ - ہمزاد مساواتیں۔ اب ہم چند مثالیں حل کرینگے جن سے معمولی

تفرقی ہمزاد مساواتوں کے تکمل کرنے کی توضیح ہوگی، واضح ہو کہ مساواتوں کی تعداد وہی ہونی چاہیے جو تابع متغیروں کی تعداد ہو۔ ہم ت کو تغیر متبوع فرض کرینگے اور صرف دو تابع متغیروں لا، ما کے لئے بحث کو محدود رکھینگے۔

مثال ۱۔ لاَ = ۔ سہ ما .... (۱)

ماَ = سہ لا .... (۲)

(۱) کو تفرق کرو اور (۲) سے ماَ کی قیمت سہ لا مندرج کرو، اس طرح ایک معمولی تفرقی مساوات ایک تابع متغیر کی رقوم میں حاصل ہوگی اور وہ یہ ہے

لاً + سہ۲ لا = ۰ جس کا حل ہے

لا = ا جم سہ ت + ب جب سہ ت یا لا = ج جم (سہ ت ۔ ک) ... (۳)

ما کی قیمت اب (۲) سے حاصل ہو سکتی ہے یعنی

ما = ا جب سہ ت ۔ ب جم سہ ت یا ما = ج جب (سہ ت ۔ ک) .. (۴)

یہ امر توجہ کے قابل ہے کہ اگرچہ ا، ب بالکل اختیاری مستقل ہیں لیکن ما میں کے مستقل معین ہو جاتے ہیں جبکہ لا کے مستقلات کو معین کر دیا جائے، اگر (۱) میں صرف لا شریک ہوتا اور (۲) میں صرف ما تو لا میں کے مستقلات سے ما کے مستقل معین نہ ہوتے۔ مثلاً مساواتوں

لاً + سہ۲ لا = ۰، ماً + سہ۲ ما = ۰

سے حاصل ہوتا ہے لا = ا جم سہ ت + ب جب سہ ت، ما = د جم سہ ت + ف جب سہ ت
اور مستقلوں ا، ب، د، ف میں کوئی رشتہ نہیں۔

مثال ۲۔ لاَ + ۵ لا ۔ ۳ ما = ۰ ..... (۱)، ماَ + ۱۵ لا ۔ ۷ ما = ۰ .... (۲)

(۱) کو تفرق کرو لاً + ۵ لاَ ۔ ۳ ماَ = ۰ .... (۳)

(۱)، (۲)، (۳) سے ما، ماَ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لاً ۔ ۲ لاَ + ۱۰ لا = ۰ .... (۴)

جس کا تکملہ ہے لا = وت (ا جم ۳ ت + ب جب ۳ ت) ...... (۵)

اب مساوات (۱) سے ما معلوم ہو سکتا ہے

$$ما = ئو^{ت} \{ (۲ا + ب) جم ۳ت + (۲ب - ا) جب ۳ت \} \ldots\ldots (۶)$$

اگر (۱) اور (۲) دونوں میں لاً، ماً شامل ہوتے تو ہم دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو تفرق کرتے اور چار مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) سے ہم ما، ماً، ماً ساقط کر سکتے۔

مثال ۳۔ جیسا مثال بالا میں ذکر ہوا ہم ذیل کی مساواتوں پر غور کرینگے جو دو باہم اثر انداز برقی حلقوں کو منسلک کرتی ہیں۔

$$ل لاً + م ماً + ز لا = پ \ldots\ldots (۱)$$

$$م لاً + ن ماً + س ما = ق \ldots\ldots (۲)$$

لا، ما برقی رویں ہیں، ل، ن ذاتی امالیتیں ہیں اور م ان کی باہمی امالیت ہے، ز اور س مزاحمتیں ہیں اور پ اور ق خارجی محرکہ برقی قوتیں ہیں۔ حاصل ضرب ل ن بڑا ہے م² سے۔

مثال ۲ کے موافق (۱) اور (۲) کو تفرق کرنے سے ہم ما، ماً، ماً ساقط کر سکتے ہیں لیکن اس جگہ ایک اور طریقہ کی ہم تشریح کرتے ہیں۔ متمم تفاعل اور خاص تکملہ کا اصول صریحاً ہمزاد خطی مساواتوں کی صورت میں بھی درست ہے۔ پ اور ق یا تو مستقل ہیں یا ت کے تفاعل ہیں اور ہم اصول مذکورہ کو (۱) اور (۲) پر استعمال کر سکتے ہیں۔

متمم تفاعل ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$ل لاً + م ماً + ز لا = ۰ \ldots\ldots (۳)$$

$$م لاً + ن ماً + س ما = ۰ \ldots\ldots (۴)$$

فرض کرو کہ لا = ا ئو^{لت}، ما = ب ئو^{لت} جہاں ا اور ب مستقل ہیں، (۳) اور (۴) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$(ل لم + ز) ا + م لم ب = ۰ \ldots\ldots (۵)$$

$$م لم ا + (ن لم + س) ب = ۰ \ldots\ldots (۶)$$

اگر ہم (۵) اور (۶) سے نسبت ا : ب ساقط کریں تو اس امر کے لئے شرط حاصل ہوگی کہ (۵) اور (۶) دونوں ایک ساتھ پوری ہوتی ہیں، شرط یہ ہے

$$(ل\ لہ + ز)(ن\ لہ + س) - م^2 لہ^2 = ۰$$

$$یا\quad (ل\ ن - م^2)\ لہ^2 + (ل\ س + ن\ ز)\ لہ + ز\ س = ۰ \quad ......(۷)$$

(۷) کی اصلیں حقیقی ہیں، کیونکہ

$$(ل\ س + ن\ ز)^2 - ۴(ل\ ن - م^2)\ ز\ س = (ل\ س - ن\ ز)^2 + ۴\ م^2\ ز\ س$$

یعنی (۷) کا ممیز مثبت ہے۔ نیز چونکہ $ل\ ن > م^2$، (۷) کی اصلوں کی ایک ہی علامت ہے، دونوں منفی ہیں۔ اگر انہیں $-لہ_1$، $-لہ_2$ کہا جائے اور یہ مستقل $ا_1$، $ا_2$ اور $ب_1$، $ب_2$ لئے جائیں تو (۳) اور (۴) کے حل حسب ذیل حاصل ہونگے

$$لا = ا_1 قو^{-لہ_1 ت} + ا_2 قو^{-لہ_2 ت}،\quad ما = ب_1 قو^{-لہ_1 ت} + ب_2 قو^{-لہ_2 ت} \quad ....(۸)$$

$ب_1$، $ا_1$ سے اور $ب_2$، $ا_2$ سے مربوط ہے مساواتوں (۵)، اور (۶) کے ذریعہ یعنی

$$ب_1 = \frac{ا_1(ز - ل\ لہ_1)}{م\ لہ_1}،\quad ب_2 = \frac{ا_2(ز - ل\ لہ_2)}{م\ لہ_2}$$

اگر پ اور ق مستقل ہوں تو خاص تکملے ہیں

$$لا = \frac{پ}{ز}،\quad ما = \frac{ق}{س}$$

اور (۸) میں ان کو جمع کرنے سے (۱) اور (۲) کے پورے تکملے حاصل ہوتے ہیں۔ دوسری مشہور صورت صرف وہ ہے جس میں $پ = ع\ جم(ن\ ت - عہ)$ اور ق = ۔ اور خاص تکملہ ذیل کی قیمتوں کو آزمائشی حل فرض کرنے اور اس طرح ع، ف، گ، ھ کی قیمتیں دریافت کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$لا = ع\ جم(ن\ ت - عہ) + ف\ جب(ن\ ت - عہ)$$

$$ما = گ\ جم(ن\ ت - عہ) + ھ\ جب(ن\ ت - عہ)$$

پر مساواتیں لاً + ک ماً + ج² لا = ۰، ماً − ک لاً + ج² ما = ۰
گردشی رقاص کے لنگر کی چھوٹی حرکتوں کو تعبیر کرتی ہیں (گردش نما کا محور تعویق کی سمت میں ہے)، نیز یہ زیمین اثر (Zeeman effect) کے نظریہ میں مقناطیسی میدان کے اندر برقیہ کی حرکت کی ابتدائی مساواتیں ہیں [ملاحظہ ہو گرے کی کتاب مقناطیسیت اور برقیات حصۂ اول دفعہ ۵۶۵ - اس کتاب کے دسویں باب میں کئی علم آموز مثالیں ملینگی]

مشق ۱۷

(۱ - ۱۶) تک کی مساواتوں کو تکمل کرو -

۱ - (۱ + لا²) عف ما = ۱ + ما²

۲ - √(۱ − لا²) عف ما = √(۱ − ما²)   ۳ - ما − لا عف ما = م (ما² + عف ما)

۴ - (لا ما + لا²) عف ما + ما² = ۰   ۵ - لا عف ما − ما = √(لا² + ما²)

۶ - (۲ لا + ۱۸ ما − ۱۴) عف ما = ۶ لا + ۵ ما − ۷

۷ - (ا لا + ب ما + ج) عف ما = م (ا لا + ب ما) + گ
ابدال ع = ا لا + ب ما کے ذریعہ ما کو بدلو۔

۸ - (ا لا + ب ما + ج) عف ما = ف لا − ا ما + گ

۹ - عف ما + ما = قو^(−لا)   ۱۰ - لا عف ما + ما = لا

۱۱ - (۱ − لا²) عف ما − لا ما = ۱   ۱۲ - (۱ + لا²) عف ما + ۲ لا ما = لا²

۱۳ - عف ما + ا ما = جم (ب لا + ج)   ۱۴ - لا عف ما + ما = لا³ ما⁶

۱۵ - لا² عف ما + ما² = لا ما

۱۶ - ما (لا² − ما² − ب²) عف ما + لا (لا² + ما² − ا²) = ۰

مساواتوں ۱۷ تا ۱۹ تک پورے تکملے اور نادر حل (جہاں موجود ہوں) معلوم کرو۔

۱۷- (ما - ع لا)^{۲} = اً ع^{۲} + ب^{۲} ۱۸- ما = ع لا + ع^{۳}

۱۹- لا^{۲} (ما - ع لا) = ما ع^{۲}

مساواتوں (۲۰ تا ۲۷) کو حل کرو

۲۰- عف^{۲} ما - (ا + ب) عف ما + ا ب ما = ۰

۲۱- عف^{۳} ما - ۵ عف^{۲} ما + ۶ عف ما = ۰

۲۲- عف^{۲} ما - ۶ عف ما + ۱۰ ما = جب ۲ لا

۲۳- عف^{۲} ما - ۳ عف ما + ۲ ما = قو^{لا}

۲۴- عف^{۲} ما + ن^{۲} ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا

۲۵- عف^{۲} ما - ن^{۲} ما = ا قو$^{ن لا}$ + ب قو$^{-ن لا}$

۲۶- عف^{۲} ما - ۶ عف ما + ۱۲ ما = لا^{۲}

۲۷- عف^{۴} ما + ۲ عف^{۲} ما + ما = ۰

۲۸ تا ۳۱ تک کی ہمزاد مساواتوں کو تکمل کرو [لاَ = د لا / د تا]

۲۸- لاَ - ۷ لا + ما = ۰، ماَ - ۲ لا - ۵ ما = ۰

۲۹- لاَ + ماَ + ۲ لا + ما = ۰، ماَ + ۵ لا + ۳ ما = ۰

۳۰- لاَ + ۲ لا - ۳ ما = ت، ماَ - ۳ لا + ۲ ما = قو^{۲ت}

۳۱- لاَ - ۳ لا - ۴ ما = ۰، ماَ + لا + ما = ۰

۳۲- مساواتوں لاً = ۰، ماً = - ج کو تکمل کرو اور مستقلات کو معلوم کرو کہ یہ شرائط پورے ہوں لا = ۰، ما = ۰، لاَ = و جم عہ، ماَ = و جب عہ جبکہ ت = ۰

۳۳- مساواتوں لاً = - مہ لا، ماً = - مہ ما کو تکمل کرو اور مستقلات معلوم کرو کہ یہ شرائط پورے ہوں لا = ا، ما = ۰، لاَ = ۰، ماَ = ب √مہ جبکہ ت = ۰

۳۴- مساوات لاً = - مہ / لا^{۲} کو تکمل کرو اور ایسے مستقلات منتخب کرو کہ

لا = ا، لاَ = ۰ جبکہ ت = ۰

۳۵- مساوات حب عف۴ ما = و شہتیروں کی خمیدگی کے نظریہ میں واقع ہوتی ہے، حب خمیدگی کی استواری ہے اور و وزن ہے اکائی طول کا۔ ذیل کے شرائط کے ماتحت مساوات کو تکمل کرو

(۱) ما = ۰، عف۲ ما = ۰ جبکہ لا = ۰ اور جبکہ لا = ل

(۲) ما = ۰، عف ما = ۰ جبکہ لا = ۰ اور جبکہ لا = ل

(۳) ما = ۰، عف ما = ۰ جبکہ لا = ۰، اور عف۲ ما = ۰، عف۳ ما = ۰ جبکہ لا = ل

۳۶- ایک برق سے بھرے ہوئے مکثف کی گنجائش ج ہے اس کی تختیوں کو تار کے ذریعہ جس کی ذاتی امالیت ل ہے اور مزاحمت ز باہم ملا دیا گیا ہے، اگر وقت ت پر تختیوں کے درمیان قوہ کا فرق و ہو تو و مساوات ذیل کو پورا کریگا

ج ل وً + ز ج وَ + و = ۰

اور برقی رو جا ہے - ج وَ، ثابت کرو کہ ان بھرن اہتزازی ہوگا اگر ج ز۲ > ۴ ل اور مدت دوران ح

ح = ۴ π ل / √(۴ ل/ج - ز۲)

اور قوہ کا لوکارثمی گھٹاؤ ہے ز ت / ۴ ل -

۳۷- مساوات عف۲ ما + ۲/لا عف ما + ن۲ ما = ۰ کو تکمل کرو متغیر متبوع ما کو ع میں بدلنے سے جہاں ع = لا ما

پورا تکملہ معلوم کرو نیز وہ تکملہ معلوم کرو جو محدود رہتا ہے جبکہ لا مائل بہ صفر ہو۔

۳۸- ثابت کرو کہ لا۲ عف۲ ما + ا لا عف ما + ب ما = ۰ کا پورا تکملہ ہے

ما = ا لا^لہ۱ + ب لا^لہ۲ جہاں لہ۱، لہ۲ مساوات

لہ (لہ - ۱) + ا لہ + ب = ۰ کی اصلیں ہیں۔

آزمائشی حل ما = لا^لہ اختیار کرو اور حسب دفعہ ۶۰ عمل کرو۔

۳۹۔ اِن مساواتوں کو تکمل کرو

(۱) لا عف² ما + ۲ عف ما = ۶ لا

(۲) لا³ عف³ ما - ۳ لا² عف² ما + ۶ لا عف ما - ۶ ما = لا²

(۳) لا² عف² ما - ۲ ما = لا

۴۰۔ متغیر متبوع لا کو طہ میں بدلنے سے جہاں لا = ق^طہ مساوات ذیل کو تکمل کرو

لا² عف² ما + لا عف ما + ن² ما = ۰

مثال ۳۸ کی مساوات کے جواب میں لہ کے لئے جو مساوات حاصل ہوتی ہے اسکی اصلیں خیالی ہیں۔

۴۱۔ تکمل کرو (فر/فر ر) (فر ما/فر ر + ۲ ما/ر) = ۰ کو

۴۲۔ اس مساوات کو تکمل کرو فر² ص/فر ر² + (۱/ر) فر ص/فر ر = ۰

۴۳۔ اس مساوات سے عف ما معلوم کرو

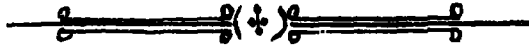
ا² عف² ما = ما {۱ + (عف ما)²}^(۳/۲)

۴۴۔ اگر ما = ع و جہاں ع، و دونوں لا کے تفاعل ہیں تو دکھاؤ کہ خطی مساوات عف² ما + ف عف ما + ق ما = ر ..... (۱)

ہو جاتی ہے و ع″ + (۲ و′ + ف و) ع′ + (و″ + ف و′ + ق و) ع = ر ..... (۲)

جہاں زبریں لا$^{\prime}$ مشتقوں کو تعبیر کرتی ہیں ۔

اگر ۶ مساوات (۱) کا حل ہو جبکہ ر صفر ہو تو ع کی قیمت (اور اسلئے ۶ کی قیمت) دریافت ہو سکتی ہے کیونکہ اس حالت میں ع کا سر صفر ہے اور (۲) خطی مساوات ہے رتبہ اول کی جبکہ عَ کو متغیر متبوع مانا جائے ۔

۴۵ ۔ اس مساوات لا^{۲} عف^{۲} ما + لا عف ما ۔ ما = لا^{۳} کو تکمل کرو ۔ رکھو ما = لا ع

باب نہم

محدود تکملے ۔ علامتِ تکمل کے اندر اعمال

۶۳۔ تکملہ کا تسلسل ۔ تکملہ کی تعریف سے کہ یہ ایک رقبہ کا ناپ ہے (دفعات ۸۲ حصہ اول، ۲۲ حصۂ دوم) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب تکمل فا(لا)، لا کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے مسلسل ہو تو تکملہ

$$\text{ی} = \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{فا(لا) فرلا} = \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{فا(ع) فرع} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اپنی اوپر کی حد لا کا مسلسل تفاعل ہوتا ہے اور اس کا مشتق فا(لا) ہے۔

$$\text{محدود تکملہ ھ} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} = -\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا(لا) فرلا} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اپنے حدود ا، ب کا تفاعل ہے اور ھ کے مشتق بلحاظ ب اور ا کے تکملہ کی تعریف کی رو سے، بالترتیب یہ ہیں

$$\frac{\text{فرھ}}{\text{فرب}} = \text{فا(ب)}، \quad \frac{\text{فرھ}}{\text{فرا}} = -\text{فا(ا)} \quad \ldots\ldots (۳)$$

لیکن جیسا کہ طبیعی سوالات میں اکثر ہوتا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۴ اور دفعہ ۴۹ مثال ۶ حصۂ اول) کہ متکمل میں کوئی محدود عدم تسلسل اُس نمونہ کا جو شکل ۳۴ میں دکھایا گیا ہے لا کی قیمت مثلاً ق = ج کے لئے ہو تو

تکملہ جبکہ لا = و م > و ع > و ا = ر
ذیل کی مساوات سے متعین ہوتا ہے

$$ی = \int_{ا}^{لا} فا(لا)\, فرلا = \int_{ا}^{ج} فا(لا)\, فرلا + \int_{ج}^{لا} فا(لا)\, فرلا$$

تکملہ ی اب بھی لا کا مسلسل تفاعل ہے لیکن $\frac{فری}{فرلا}$ غیر مسلسل ہے لا = ج کے لئے۔ دفعہ ۴۴ حصۂ اول میں جو ترقیم دی گئی ہے اسکے مطابق

$$\left[\frac{فری}{فرلا}\right]_{لا=ج-.} = فا(ج - .) = ع گ، \quad \left[\frac{فری}{فرلا}\right]_{لا=ج+.} = فا(ج + .) = ع ص$$

عدم تسلسل کو فا(ج + سہ) - فا(ج - سہ) کی انتہا سے ناپا جائیگا جبکہ سہ اور سہ دونوں بلا واسطہ صفر کی طرف مائل ہوں، اس صورت میں انتہا گ ص ہے، اور عدم تسلسل کو محدود کہا گیا ہے کیونکہ گ ص محدود ہے۔

اس طرح کے عدم تسلسل جیسے $\frac{1}{لا - ج}$ کو جبکہ لا ← ج لامتناہی کہا جائیگا کیونکہ فرق $\frac{1}{سہ} - \frac{1}{(- سہ)}$ کی انتہا لامتناہی ہے۔

شکل ۴۲

دفعہ ۱۷ میں تکملہ کی تعریف کو وسعت دیکر ایسی صورتوں کو اسکی تعریف میں شامل کرلیا گیا ہے جہاں متکمل میں لاانتہا عدم تسلسل ہو اور اس تعریف کی رو سے تکملہ مسلسل رہتا ہے۔ جب متکمل میں لاانتہا عدم تسلسل ہو یا جب تکملہ کی ایک یا دونوں حدود لامتناہی ہوں تو تکملہ کو ہم غیر واجب یا لامتناہی تکملہ کہینگے۔ اس باب کے خاص مضمون کی بحث شروع کرنے سے پہلے ہم غیر واجب تکملہ پر مختصر غور کرینگے۔ اس بحث میں باب پنجم کے تخیلات اور اصطلاحات اکثر طور پر استعمال میں آئینگے۔

۶۴۔ لامتناہی حدود۔ جب، $\text{لا} \geq \text{ر}$ اور لا کی ایسی قیمتوں کے لئے فا(لا) مسلسل ہو تو تعریف (دفعہ ۱۷) کی رو سے

$$\int_{\text{ر}}^{\infty} \text{فا(لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{لا}\to\infty} \int_{\text{ر}}^{\text{لا}} \text{فا(لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{لا}\to\infty} \text{ف(لا)} \quad \ldots\ldots(1)$$

بشرطیکہ $\text{لا}\to\infty$ کے لئے یہ انتہا محدود ہو۔

اب دفعہ ۳۹ مسئلہ (۳) کی رو سے اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ ف (لا) ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا مائل بہ لاتناہی ہو یہ ہے کہ فرق ف (ج) ۔ ف (ب) مائل بہ صفر ہو جبکہ ب اور ج کسی طرح سے بھی مائل بہ لاتناہی ہوں۔ ایسی حالت میں

$$\text{ف(ج)} - \text{ف(ب)} = \int_{\text{ر}}^{\text{ج}} \text{فا(لا) فرلا} - \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{فا(لا) فرلا} = \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \text{فا(لا) فرلا} \quad \ldots\ldots(2)$$

پس تکملہ (۱) کا وجود ہوگا اگر (۲) کے موخر الذکر تکملہ کی انتہا کا وجود ہو جبکہ ب اور ج کسی طرح سے بھی مائل بہ لاتناہی ہوں۔ جب اس انتہا کا وجود ہو تو تکملہ (۱) کو مستدق کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر فا(لا) مسلسل ہو جبکہ $\text{لا} \leq \text{ر}$ تو تکملہ

$\int^{\infty}$ فا (لا) فرلا .... (۳)

مستدق ہوگا بشرطیکہ تکملہ

$+ \int_{ج}^{ب}$ فا (لا) فرلا .... (۴)

کی انتہا صفر ہو جبکہ مثبت عدد ب، جَ کسی طریقہ سے بھی مائل بہ لامتناہی ہوں۔ جب تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہوں تو تکملہ مستدق ہوتا ہے، بشرطیکہ ذیل کے ہر ایک تکملہ

$\int_{ب}^{ج}$ فا (لا) فرلا اور $\int_{جَ}^{بَ}$ فا (لا) فرلا ...... (۵)

کی انتہا صفر ہو جبکہ مثبت اعداد ب، ج، بَ، جَ کسی طریقہ سے بھی مائل بہ لامتناہی ہوں۔

ظاہر ہے کہ تکملہ (۱) کا استدقاق فا (لا) کے رویہ پر منحصر ہے جبکہ لا کو بہت بڑی قیمتیں دی جائیں (مقابلہ کرو نوٹ دفعہ ۴ھ کے ساتھ)، جب کسی صورت میں نامحدود تکملہ حاصل ہو سکے تو استدقاق کے متعلق بآسانی فیصلہ ہو سکتا ہے، ذیل کا مسئلہ کارآمد ثابت ہوگا جبکہ محدود تکملہ حاصل نہ ہو سکے۔

مسئلہ۔ فرض کرو کہ لا کی بڑی قیمتوں کے لئے مثلاً جبکہ لا > ع تفاعل فا (لا) اس شکل میں رکھا جا سکتا ہے $\frac{\text{فہ (لا)}}{\text{لا}^{ک}}$۔ اگر لا کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو مثلاً ع سے بڑی ہو فہ (لا) تعداداً کم ہو ایک محدود عدد ا سے تو تکملہ (۱) مستدق ہوگا بشرطیکہ ک > ۱ لیکن اگر لا کی ہر ایسی

قیمت کے لئے جو ع سے بڑی ہو فا(لا) ایک مثبت عدد ب سے ہمیشہ بڑا رہے یا ہمیشہ ایک منفی عدد - ج سے کم رہے (ب اور ج صفر نہیں ہیں) تو تکملہ (۱) مستدق نہیں ہوگا جبکہ $ک \leqq ۱$

ثبوت بآسانی دفعہ ۱۵ مسئلہ ۷ سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر صرف عددی قیمتوں کو ملحوظ رکھا جائے اور $فا(لا) < \frac{۱}{لا^{ک}}$ جبکہ $لا > ع$ تو

$$\int_{ب}^{ج} فا(لا)\, فرلا < \int_{ب}^{ج} \frac{۱}{لا^{ک}}\, فرلا = \frac{۱}{ک-۱}\left(\frac{۱}{ب^{ک-۱}} - \frac{۱}{ج^{ک-۱}}\right)$$

جب ب اور ج مائل بہ لاتناہی ہوں تو یہ انتہا صفر ہوتی ہے اگر $ک > ۱$

انساع کی صورت بھی اسی طرح ثابت ہوتی ہے۔

لامتناہی عدود کی اور صورتوں کے لئے بھی اسی طرح کا مسئلہ صادق آئیگا۔

مطلق اور مشروط استدقاق - کسی تکملہ کو مطلق طور پر مستدق کہا جائیگا اگر یہ اُس صورت میں بھی مستدق رہے جبکہ متکمل فا(لا) کی بجائے اسکی عددی قیمت |فا(لا)| رکھدی جائے۔ اگر کوئی مستدق تکملہ متکمل فا(لا) کی بجائے اسکی عددی قیمت |فا(لا)| رکھنے سے مستدق نہ رہے تو اسکو مستدق بالشرط کہینگے۔

مثال ۱- تکملہ $\int_{۰}^{\infty} \frac{جب\, لا\, فرلا}{لا}$ کا استدقاق مشروط ہے۔

مسئلہ بالا اس صورت میں سیدھا نہیں لگ سکتا (اگرچہ تکمل بالحصص کے بعد ممکن ہے لگ سکے) لیکن مثال ۲۳ مشق ۵ کی رو سے اگر

$ن\pi \leqq ب < (ن+۱)\pi$ تو

$$\int_{۰}^{ب} \frac{جب\, لا\, فرلا}{لا} = ع_{۰} - ع_{۱} + \ldots + (-۱)^{ک} ع_{ک} + \ldots + (-۱)^{ن-۱} ع_{ن-۱} + (-۱)^{ن} ع_{ب}$$

جہاں $\text{ع}_{\text{ک}} = \int_{۰}^{\pi} \frac{\text{جب ع ف ع}}{\text{ع}+\text{ک}\pi}$ (ک = ۰، ۱، ... ن-۱)، $\text{ع}_{\text{ب}} = \int_{۰}^{\text{ب}-\text{ن}\pi} \frac{\text{جب ع ف ع}}{\text{ع}+\text{ن}\pi}$

$\text{ع}_{\text{ک}}$ کا متکمل کبھی منفی نہیں ہوتا اور چونکہ $\text{ع}+\text{ک}\pi$ کم ہے $\text{ع}+(\text{ک}+۱)\pi$ سے اس لئے $\text{ع}_{\text{ک}}$ بڑا ہے $\text{ع}_{\text{ک}+۱}$ سے اس لئے مثال صفحہ ۱۸۰ یا مسئلہ (۲) دفعہ ۱۸۱ کے موافق تکملہ مستدق ہے، لیکن یہ مشروط استدقاق ہے۔

کیونکہ $\int_{۰}^{\text{ب}} \left|\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\right| \text{ف لا} = \text{ع}_۰ + \text{ع}_۱ + \dots + \text{ع}_{\text{ن}-۱} + \text{ع}_{\text{ب}}$

اور $\text{ع}_{\text{ک}} > \int_{۰}^{\pi} \frac{\text{جب ع ف ع}}{\pi+\text{ک}\pi}$ یعنی $\text{ع}_{\text{ک}} > \frac{۲}{(\text{ک}+۱)\pi}$

یعنی تکملہ بڑا ہے $\frac{۲}{\pi}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{\text{ن}}\right)$ سے اور اسلئے مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے جبکہ ب مائل بہ لاتناہی ہو۔

مثال ۲۔ اگر د > ۰ تو تکملہ $\int_{\text{د}}^{\infty} \frac{\text{جم لا ف لا}}{\text{لا}}$ مستدق بالشرط ہے

مثال ۳۔ اگر د > ۰ اور ر > ۱ تو ذیل کا ہر ایک تکملہ

$$\int_{\text{د}}^{\infty} \frac{\text{جب لا ف لا}}{\text{لا}^{\text{ر}}} \text{،} \quad \int_{\text{د}}^{\infty} \frac{\text{جم لا ف لا}}{\text{لا}^{\text{ر}}}$$

مطلق طور پر مستدق ہے۔ مثال ۲ مثال ۱ کی طرح ثابت ہوتی ہے، مثال ۳ کے سوال اوپر جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس کی مدد سے حل ہونگے کیونکہ |جب لا|، |جم لا| دونوں کبھی ایک سے نہیں بڑھتے۔

۶۵- **لامتناہی تکمل**- اگر فا(لا) مسلسل ہو لا = ا + صہ (صہ > ۰) سے لا = ب تک لیکن فا(ا + صہ) کی انتہا لامتناہی ہو جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو تو (دفعہ ۱۷) کی رو سے

$$\int_{ا}^{ب} فا(لا)\, فرلا = نہا_{صہ \to ۰} \int_{ا+صہ}^{ب} فا(لا)\, فرلا = نہا_{لا \to ا} ف(لا)$$

.... (۱)

بشرطیکہ یہ انتہا ایک معیّن مقدار ہو۔
اب ف(لا) کی انتہا معیّن مقدار ہو گی اگر ف(ا + صَہ) - ف(ا + صہ) صفر کی طرف مائل ہو جبکہ مثبت مقداریں صہ، صَہ کسی طریقہ سے بھی مائل بہ صفر ہوں۔ پس تکملہ (۱) مستدق ہو گا اگر تکملہ

$$\int_{ا+صہ}^{ا+صَہ} فا(لا)\, فرلا = \int_{ا+صہ}^{ب} فا(لا)\, فرلا - \int_{ا+صَہ}^{ب} فا(لا)\, فرلا \; .....(۲)$$

مائل بہ صفر ہو جبکہ صہ، صَہ کسی طریقہ سے بھی صفر کی طرف مائل ہوں۔
اسی طرح سے تکملہ کے معنی اس صورت میں متعین ہو سکتے ہیں جبکہ فا(لا) مائل بہ لامتناہی ہو جبکہ لا، ب کی طرف مستدق ہو یا قیمت ج کی طرف مستدق ہو جہاں ج، ا اور ب کے درمیان واقع ہے۔
(دیکھو دفعہ ۱۷، نیز صفحہ ۳۴ کی مثال ۴۲)

مسئلہ- اگر لا = ا سے لا = ب تک تکمل فا(لا) اس شکل کا $\frac{فہ(لا)}{(لا - ا)^{ک}}$ کا ہو جہاں فہ(لا) مسلسل ہے لا = ا سے لا = ب تک تو تکملہ (۱) مستدق ہو گا بشرطیکہ ک < ۱ لیکن جب فہ(ا) صفر نہ ہو تکملہ مستدق نہیں ہو گا اگر ک ≥ ۱۔

عدم تسلسل کی اور صورتوں کے لئے اسی طرح کا مسئلہ درست ہوگا ثبوت فوراً مسئلہ ۷، دفعہ ۱۵ سے حاصل ہوتا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۱۷ کا آخری حصہ)

مثال ۱۔ تکملہ $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \frac{\text{جب لا د لا}}{\text{لا}^{\text{ر}}}$ جس میں ب > م۔ مستدق ہے اگر ر < ۲،

ہم لکھ سکتے ہیں فہ(لا) = $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$، تکمل اس صورت میں ہوگا

$\frac{\text{فہ(لا)}}{\text{لا}^{\text{ر}-1}}$، پس تکملہ مستدق ہوگا اگر ر - ۱ < ۱ یا ر < ۲، اگر ہم لیں فہ(لا) = جب(لا) تو یہ قید کہ فہ(۰) کو صفر نہیں ہونا چاہیے عائد ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ تکملہ $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \frac{\text{جم لا د لا}}{\text{لا}^{\text{ر}}}$ جس میں ب > م۔ مستدق ہوگا اگر ر < ۱

اس صورت میں فہ(لا) = جم لا۔

دوہرے غیر واجب تکملوں کی بحث ذرا زیادہ مشکل ہے۔ جب متکمل لامتناہی ہوتا ہو ایک یا زیادہ الگ الگ نقطوں پر یا کسی ایک منحنی کے ہر ایک نقطہ پر جو تکمل کے رقبہ کے اندر یا اسکے حدود پر واقع ہو تو رقبہ کو ذرا سا سکیڑ لینا چاہیئے کہ ایسے نقطے رقبہ سے خارج ہو جائیں۔ اب چونکہ متکمل اس نئے رقبہ پر مسلسل ہے اسلئے تکملہ کی قیمت اس پر محدود حاصل ہوگی اور یہ ممکن ہے کہ جب ان سکڑے ہوئے رقبہ کو توسیع دیکر اصلی رقبہ پر انتہا میں منطبق کیا جائے تو اس محدود قیمت والے تکملہ کی انتہا ایک معین مقدار ہو۔ اگر ایسا ہو تو اس انتہا کو ہم اصلی تکملہ کی قیمت تسلیم کرینگے۔ ذیل میں ہم دو مثالیں درج کرتے ہیں، ایسے تکملوں کی مفصل بحث اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

مثال ۳۔ $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{د ما} \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \frac{\text{د لا}}{(\text{پ لا}^{\text{ل}} + \text{ق ما}^{\text{م}})^{\text{ن}}}$، ل، م، پ، ق سب مثبت ہیں

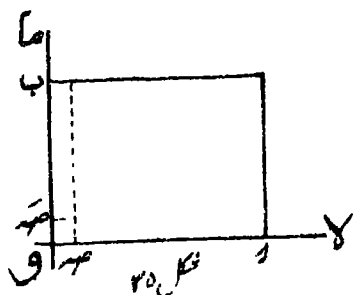
لا = ۰، ما = ۰ پر متکمل لامتناہی ہے، لیکن رقبۂ تکمل کے کسی اور نقطہ پر لامتناہی نہیں ہے پس مبدأ کے پاس ایک چھوٹا مستطیل بنانے سے جسکے ضلعے ضہ، صہ

ہیں ہم مبدا کو رقبۂ تکمل سے خارج کر دیتے ہیں۔ اِس نئے رقبہ پر تکملہ کی قیمت حسب ذیل ہے (شکل ۳۵)

شکل ۳۵

$$\int_{ب}^{ب} د ما \int_{صہ}^{ر} \frac{د لا}{(پ لا + ق ما)^{ن}} + \int_{صہ}^{ب} د ما \int_{صہ}^{صہ} \frac{د لا}{(پ لا + ق ما)^{ن}}$$

$$= \frac{۱}{(۱-ن)(۲-ن) پ ق} \left\{ (پ ر + ق ب)^{۲-ن} - (پ ر)^{۲-ن} - (ق ب)^{۲-ن} \right.$$

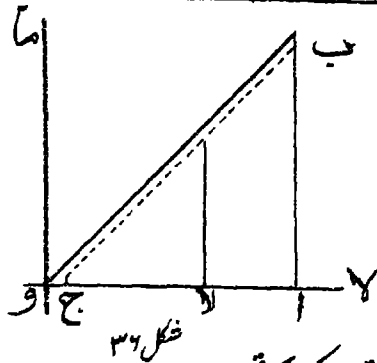
$$\left. + (پ صہ)^{۲-ن} + (ق صہ)^{۲-ن} - (پ صہ + ق صہ)^{۲-ن} \right\}$$

اگر ن > ۲ تو یہ جملہ ایک معین انتہائی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ صہ، صہ کسی طور سے بھی صفر کی طرف مائل ہوں۔ اگر ن = ۲ تو تکملہ میں لوکارثم شریک ہوتے ہیں جو معین انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتے۔ اگر ن > ۲ تو یہ جملہ لامتناہی ہو جاتا ہے۔
پس دیا ہوا تکملہ مستدق ہے اگر ن > ۲۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر متکمل $\frac{فہ (لا، ما)}{(پ لا + ق ما)^{ن}}$ ہوتا جہاں فہ (لا، ما) مسلسل ہے تو بھی یہ تکملہ مستدق ہوتا۔

مثال ۴۔ $\int_{ب}^{ر} د لا \int_{ب}^{لا} \frac{د ما}{(لا - ما)^{ن}}$ جہاں ن > ۰۔

تکمل کا رقبہ مثلث متساوی الساقین و ا ب (شکل ۳۶) ہے
و ا = ا = ا ب۔ متکمل لامتناہی ہے خط و ب کے ہر ایک نقطہ پر،
اس لئے ہم و ب کے متوازی اور و ا پر عمود وار نقطہ دار خط کھینچنے سے خط و ب کو خارج کر دیتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ و ب کے متوازی خط پر
معین لا - صہ ہے اور و ج = ما

شکل ۳۶

اس سکڑے ہوئے رقبہ پر تکملہ کی قیمت ہے

$$\int_{\text{حا}}^{\text{ا}} \text{فرلا} \int_{\text{ب}}^{\text{لا}-\text{صہ}} \frac{\text{فرما}}{(\text{لا}-\text{ما})^{\text{ن}}} = \frac{\text{ا}^{۲-\text{ن}} - \text{حا}^{۲-\text{ن}}}{(۱-\text{ن})(۲-\text{ن})} - \frac{\text{ا}\,\text{صہ}^{۱-\text{ن}} - \text{حا}\,\text{صہ}^{۱-\text{ن}}}{۱-\text{ن}}$$

اگر ن < ۱ اور صرف اسی صورت میں جبکہ ن < ۱، اس جملہ کی انتہا ایک معین مقدار ہوگی جبکہ صہ، حا بلاواسطہ صفر کی طرف مائل ہوں۔ پس دیا ہوا تکملہ اور اسی طرح سے تکملہ $\frac{\text{فہ}(\text{لا}، \text{ما})}{(\text{لا}-\text{ما})^{\text{ن}}}$ جہاں فہ (لا، ما) تمام رقبہ و ا ب کے اندر مسلسل ہو مستدق ہوگا اگر ن < ۱۔

۶۶۔ دو مشہور تکملے۔ ذیل میں $\frac{۱}{\text{جب}\,\text{لا}}$ کے جو جملہ دیا گیا ہے اس کے ثبوت کے لئے طالب علم دیکھے کرسٹل کا جبر و مقابلہ حصہ دوم تیسواں باب دفعہ ۱ یا ھابسن کی کتاب علم مثلث دفعہ ۲۹۵۔ لا کوئی قیمت اختیار کر سکتا ہے سوائے صفر اور ن π کے جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\frac{۱}{\text{جب}\,\text{لا}} = \frac{۱}{\text{لا}} + \sum_{\text{ن}=۱}^{\infty} (-۱)^{\text{ن}} \left(\frac{۱}{\text{لا}-\text{ن}\pi} + \frac{۱}{\text{لا}+\text{ن}\pi} \right).$$

$$\sum_{\text{ن}=۰}^{\infty} (-۱)^{\text{ن}} \left(\frac{۱}{\text{ن}\pi+\text{لا}} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)\pi-\text{لا}} \right) \ldots\ldots (\text{ا})$$

(ا) میں فرض کرو کہ لا = ع π جہاں ع کسر واجب ہے۔ تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi}{\text{جب}\,\text{ع}\pi} = \sum_{\text{ن}=۰}^{\infty} (-۱)^{\text{ن}} \left(\frac{۱}{\text{ن}+\text{ع}} + \frac{۱}{\text{ن}+۱-\text{ع}} \right) \ldots\ldots\ldots (\text{ب})$$

(ل) $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} \text{ فرلا} = \frac{\pi}{۲}$

دفعہ ۶۴ کی مثال ۱ میں رکھو ب = (ن + ۱) π ، ایسا انتخاب جائز ہے کیونکہ ب کسی طور سے بھی مائل بہ لاتناہی ہو سکتا ہے ۔ اسلئے

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} \text{ فرلا} = \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \left\{ \text{ع}_{۰} - \text{ع}_{۱} + \dots + (-۱)^{\text{ک}} \text{ع}_{\text{ک}} + \dots + (-۱)^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ن}} \right\}$$

$$\text{اب ع}_{\text{ک}} = \int_{0}^{\pi} \frac{\text{جب ع فرع}}{\text{ع} + \text{ک}\pi} = \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جب ع فرع}}{\text{ع} + \text{ک}\pi} + \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جب ع فرع}}{(\text{ک}+۱)\pi - \text{ع}}$$

$$\text{کیونکہ اندراج ع} = \pi - \text{و کے ذریعہ } \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \frac{\text{جب ع فرع}}{\text{ع} + \text{ک}\pi} = \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جب و فرو}}{(\text{ک}+۱)\pi - \text{و}}$$

$$\text{اسلئے } \int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} \text{ فرلا} = \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \left\{ \sum_{\text{ک}=۰}^{\text{ک}=\text{ن}} (-۱)^{\text{ک}} \left(\frac{۱}{\text{ع} + \text{ک}\pi} + \frac{۱}{(\text{ک}+۱)\pi - \text{ع}} \right) \text{جب ع فرع} \right.$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{\text{جب ع}} \text{ جب ع فرع} = \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \text{فرع} = \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{اور ہم نے یہ تسلیم کرلیا ہے کہ نہا}_{\text{ن}\to\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \left\{ \sum_{\text{ک}=۰}^{\text{ک}=\text{ن}} (-۱)^{\text{ک}} \left(\frac{۱}{\text{ع} + \text{ک}\pi} + \frac{۱}{(\text{ک}+۱)\pi - \text{ع}} \right) \text{جب ع فرع} \right.$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \left\{ \sum_{\text{ک}=0}^{\text{ک}=\text{ن}} (-1)^{\text{ک}} \left(\frac{1}{\text{ع}+\text{ک}\,\pi} + \frac{1}{(\text{ک}+1)\pi - \text{ع}} \right) \right\} \text{جب ع فرع}$$

یہ مفروضہ جائز ہے کیونکہ یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ موخر الذکر متسلسل یکساں طور پر مستدق سلسلہ ہے۔

نتیجہ صحیح $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب ا لا}}{\text{لا}} \,\text{فرلا} = \frac{\pi}{2}$ اگر $\text{ا} > 0$

$= -\frac{\pi}{2}$ اگر $\text{ا} < 0$

$= 0$ اگر $\text{ا} = 0$

اگر $\text{ا} > 0$ تو ابدال $\text{ا لا} = \text{ما}$ کے ذریعہ تکملہ وہی ہو جاتا ہے جو اوپر حاصل کیا گیا۔

اگر $\text{ا} < 0$ تو تکملہ مساوی ہے

$$-\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب اَ لا}}{\text{لا}} \,\text{فرلا} = -\frac{\pi}{2}$$

جہاں $\text{اَ} = -\text{ا} =$ مثبت مقدار۔ اگر $\text{ا} = 0$ تو متکمل کا ہر جزو صفر ہوگا اسلئے تکملہ صفر ہے۔ اس لئے تکملہ ا کا غیر مسلسل تفاعل ہے۔

(ب) $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}^{\text{ع}-1}\,\text{فرلا}}{1+\text{لا}} = \frac{\pi}{\text{جب ع}\,\pi}$ اگر $0 < \text{ع} < 1$

متکمل کو اِن شکلوں میں لکھا جا سکتا ہے

$\text{لا} = 0$ کے نزدیک $\frac{1}{1+\text{لا}} \times \frac{1}{\text{لا}^{1-\text{ع}}}$، $\text{لا} = \infty$ کے نزدیک $\frac{1}{\frac{1}{\text{لا}}+1} \times \frac{1}{\text{لا}^{2-\text{ع}}}$

اسلئے استدقاق کے لئے ضروری ہے کہ $0 < \text{ع} < 1$

تکملہ کو اگر ت سے تعبیر کریں تو

$$ت = \int_{ب}^{۱} \frac{لا^{ع-۱}\, ورلا}{۱+لا} + \int_{۱}^{\infty} \frac{لا^{ع-۱}\, ورلا}{۱+لا}$$

دوسرے تکملہ میں رکھو $لا = \frac{۱}{ع}$ تو حاصل ہوگا

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{لا^{ع-۱}\, ورلا}{۱+لا} = \int_{ب}^{۱} \frac{ع^{-ع}\, ورع}{۱+ع} = \int_{ب}^{۱} \frac{لا^{-ع}\, ورلا}{۱+لا}$$

پس $$ت = \int_{ب}^{۱} \frac{لا^{ع-۱}+لا^{-ع}}{۱+لا}\, ورلا$$

اب $$\frac{۱}{۱+لا} = \sum_{ک=ب}^{ک=ن} (-۱)^{ک}\, لا^{ک} + (-۱)^{ن+۱} \frac{لا^{ن+۱}}{۱+لا}$$

لیکن $$\int_{ب}^{۱} (لا^{ع-۱}+لا^{-ع})\, لا^{ک}\, ورلا = \frac{۱}{ک+ع} + \frac{۱}{ک+۱-ع}$$

پس $$ت = \sum_{ک=ب}^{ک=ن} (-۱)^{ک} \left(\frac{۱}{ک+ع} + \frac{۱}{ک+۱-ع}\right) + (-۱)^{ن+۱} \int_{ب}^{۱} \frac{(لا^{ع-۱}+لا^{-ع})\, لا^{ن+۱}}{۱+لا}\, ورلا$$

جیسے ن لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے موخر الذکر تکملہ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے کیونکہ یہ کم ہے ذیل کے تکملہ سے

$$\int_{ب}^{۱} (لا^{ع-۱}+لا^{-ع})\, لا^{ن+۱}\, ورلا = \frac{۱}{ن+ع+۱} + \frac{۱}{ن-ع+۲}$$

اسلئے $$ت = \sum_{ک=ب}^{ک=ن} (-۱)^{ک} \left(\frac{۱}{ک+ع} + \frac{۱}{ک+۱-ع}\right) = \frac{\pi}{جب\, ع\pi}$$

۶۷ ـ گاما تفاعل ـ مشق ۹ حصہ دوم صفحات ۱۳۳ تا ۱۳۵ پر گاما اور بیٹا تفاعلوں کے چند سادہ خواص بیان کئے گئے ہیں ـ اب ہم دو ضروری نتائج درج کرتے ہیں ـ

(۱) اگر $۰ < \text{ع} < ۱$ تو $\text{جا}(\text{ع})\,\text{جا}(۱-\text{ع}) = \dfrac{\text{ٹ}}{\text{جب ع ٹ}}$

امثلہ ۲۰، ۲۱ مشق ۹ صفحہ ۱۳۴ میں فرض کرو کہ $\text{ن} = \text{ع}$، $\text{م} = ۱ - \text{ع}$ اس طرح $\text{جا}(\text{م}+\text{ن}) = \text{جا}(۱) = ۱$، تب

$$\text{جا}(\text{ع})\,\text{جا}(۱-\text{ع}) = \text{با}(\text{ع}،۱-\text{ع}) = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}^{\text{ع}-۱}\,\text{فرلا}}{۱+\text{لا}} = \frac{\text{ٹ}}{\text{جب ع ٹ}}$$

دفعہ بالا، نتیجہ (ب) کی رو سے ـ

(ب) $\text{جا}(\text{ع})\,\text{جا}(\text{ع}+\frac{۱}{۲}) = \dfrac{\sqrt{\text{ٹ}}}{۲^{۲\text{ع}-۱}}\,\text{جا}(۲\text{ع})$

$\text{با}(\text{ع}،\text{ع})$ پر غور کرو ـ

$$\text{با}(\text{ع}،\text{ع}) = \int_{0}^{۱} \text{لا}^{\text{ع}-۱}(۱-\text{لا})^{\text{ع}-۱}\,\text{فرلا} = \int_{0}^{۱} \left\{\frac{۱}{۴} - \left(\frac{۱}{۲}-\text{لا}\right)^{۲}\right\}^{\text{ع}-۱} \text{فرلا}$$

یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ دوسرا تکملہ (مقابلہ کرو دفعہ ۱۶، مسئلہ ۳ کے ساتھ) مساوی ہے اس تکملہ کے

$$۲\int_{0}^{\frac{۱}{۲}} \left\{\frac{۱}{۴} - \left(\frac{۱}{۲}-\text{لا}\right)^{۲}\right\}^{\text{ع}-۱} \text{فرلا}$$

جس سے ابدال $\frac{۱}{۲} - \text{لا} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{ء}}$ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{با}(\text{ع}،\text{ع}) = \frac{۱}{۲^{۲\text{ع}-۱}} \int_{0}^{۱} \text{ء}^{-\frac{۱}{۲}}(۱-\text{ء})^{\text{ع}-۱}\,\text{فرء} = \frac{۱}{۲^{۲\text{ع}-۱}}\,\text{با}\left(\frac{۱}{۲}،\text{ع}\right)$$

بیٹا تفاعلوں کو گاما تفاعلوں کی رقوم میں بیان کرنے سے اور یہ ملحوظ رکھنے سے کہ جا$(\frac{1}{2})$ = $\frac{\pi}{2}$ ہمیں مساوات ب حاصل ہوتی ہے۔

۶۸ — اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ۔ مشق ۵ امثلہ ۳۰، ۳۱

میں اس مسئلہ کا حوالہ دیا گیا ہے۔ چونکہ محدود تکملوں کی بحث میں یہ اساسی اہمیت رکھتا ہے، اس لئے اب ہم اسے ثابت کرینگے۔ یہاں پر چند الفاظ ایسے تفاعل کے متعلق بیان کر دینا مناسب ہوگا جو اپنی وجہ یا دلیل کے بڑھنے سے یا تو کبھی نہیں گھٹتا یا کبھی نہیں بڑھتا۔ ایسے تفاعل کو ہم یکرنگ (Monotonic) کہینگے اس مسئلہ کا ثبوت ذیل کے سادہ سے تمہیدیہ پر منحصر ہے جسے **ایبل** کی لاتساوی کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔

تمہیدیہ اگر ر کی تمام قیمتوں کے لئے جو ن کے مساوی ہوں یا اس سے کم ہوں جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

$$ا > ع_{۱} + ع_{۲} + ع_{۳} + \dots + ع_{ر} > ب$$

جہاں ع۱، ع۲، ..... ، عن کوئی حقیقی مقداریں ہیں اور اگر ا۱، ا۲، ... ، ان مثبت مقادیر کا نہ بڑھنے والا تواتر ہو تو

$$ا_{۱}\,ا > ا_{۱}\,ع_{۱} + ا_{۲}\,ع_{۲} + \dots + ا_{ن}\,ع_{ن} > ا_{۱}\,ب$$

اعداد ا۱، ا۲، ..... ان ایک نہ بڑھنے والا تواتر بنائینگے اگر اس کا ہر ایک عدد اپنے بعد کے عدد سے بڑا ہو یا اس کے مساوی ہو۔ اسی طرح نہ گھٹنے والا تواتر وہ ہوگا جس میں کا ہر ایک عدد اپنے بعد کے عدد کی نسبت کم ہو یا اسکے مساوی ہو۔ اس تمہیدیہ کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$س_{ر} = ع_{۱} + ع_{۲} + \dots + ع_{ر}\text{، تب}$$

$$ع_{۱} = س_{۱}\text{، } ع_{۲} = س_{۲} - س_{۱}\text{، } ع_{۳} = س_{۳} - س_{۲}\text{، } \dots\, ع_{ن} = س_{ن} - س_{ن-۱}$$

$ا_1 ع_1 + ا_2 ع_2 + ا_3 ع_3 + \ldots\ldots + ا_ن ع_ن$ کو س سے تعبیر کرو اور $ع_1$، $ع_2$..... کی قیمتیں $س_1$، $س_2$..... کی رقوم میں درج کرو۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$س = ا_1 س_1 + ا_2 (س_2 - س_1) + ا_3 (س_3 - س_2) + \ldots + ا_ن (س_ن - س_{ن-1})$$

$$= (ا_1 - ا_2) س_1 + (ا_2 - ا_3) س_2 + \ldots + (ا_{ن-1} - ا_ن) س_{ن-1} + ا_ن س_ن$$

فرق $ا_1 - ا_2$، $ا_2 - ا_3$، ..... یا تو سب مثبت ہیں یا صفر ہیں اور ہر ایک مقدار $س_1$، $س_2$، ..... کم ہے ا سے اور بڑی ہے ب سے۔ اسلئے

$$س < \{(ا_1 - ا_2) + (ا_2 - ا_3) + \ldots + (ا_{ن-1} - ا_ن) + ا_ن\} ا$$

$$\text{لیکن} > \{(ا_1 - ا_2) + (ا_2 - ا_3) + \ldots + (ا_{ن-1} - ا_ن) + ا_ن\} ب$$

$$\text{یعنی}\quad ا_1 ا > س > ا_1 ب$$

اگر ا اور ب کے درمیان ط ایک اوسط قیمت ہو تو

$$س = ا_1 ط$$

مسئلہ ا۔ اگر تمام وقفہ $ا \leq لا \leq ب$ میں تفاعل فا(لا) مسلسل مثبت اور نہ بڑھنے والا ہو اور اگر سا(لا) اس وقفہ میں مسلسل ہو تو

$$\int_ا^ب فا(لا)\, سا(لا)\, ڈلا = فا(ا) \int_ا^{ضا} سا(لا)\, ڈلا$$

جہاں $ا \leq ضا \leq ب$۔

وقفہ (ا، ب) کو ن حصوں $(ا، لا_1)$، $(لا_1، لا_2)$، ..... $(لا_{ن-1}، ب)$ میں تقسیم کرو

اور تشاکل کی خاطر فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{لا}_0$ ، $\text{ب} = \text{لا}_\text{ن}$ ، تب

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا})\, \text{سا}(\text{لا})\, \text{ء}\text{لا} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \int_{\text{لا}_{\text{ر}-1}}^{\text{لا}_\text{ر}} \text{فا}(\text{لا})\, \text{سا}(\text{لا})\, \text{ء}\text{لا} \quad ....(۱)$$

وقفہ $(\text{لا}_{\text{ر}-1} ، \text{لا}_\text{ر})$ میں $\text{فا}(\text{لا})$ کی بجائے $\text{فا}(\text{لا}_{\text{ر}-1}) - \{\text{فا}(\text{لا}_{\text{ر}-1}) - \text{فا}(\text{لا})\}$ رکھو اور $\text{لا}_{\text{ر}-1}$ سے $\text{لا}_\text{ر}$ تک کے اس تکملہ کو بطور دو تکملوں کے فرق کے مساوی لکھو۔ اس طرح

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا})\, \text{سا}(\text{لا})\, \text{ء}\text{لا} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{فا}(\text{لا}_{\text{ر}-1}) \int_{\text{لا}_{\text{ر}-1}}^{\text{لا}_\text{ر}} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ء}\text{لا} - \text{ب} \quad ....(۲)$$

$$\text{جہاں } \text{ب} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \int_{\text{لا}_{\text{ر}-1}}^{\text{لا}_\text{ر}} [\text{فا}(\text{لا}_{\text{ر}-1}) - \text{فا}(\text{لا})]\, \text{سا}(\text{لا})\, \text{ء}\text{لا} \quad ....(۳)$$

تمہیدیہ میں فرض کرو کہ $\text{ا}_\text{ر} = \text{فا}(\text{لا}_{\text{ر}-1})$ اور

$$\text{ع}_\text{ر} = \int_{\text{لا}_{\text{ر}-1}}^{\text{لا}_\text{ر}} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ء}\text{لا} \text{ ، پس } \text{س}_\text{ر} = \int_{\text{ا}}^{\text{لا}_\text{ر}} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ء}\text{لا}$$

تکملہ $\int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ء}\text{لا}$ ، $\text{لا} = \text{ا}$ سے $\text{لا} = \text{ب}$ تک مسلسل تفاعل ہے، اس لئے اس صورت میں تمہیدیہ کی اوسط قیمت ط وقفہ (ا ، ب) کے اندر لا کی کسی قیمت (یا قیمتوں) کے جواب میں اس تکملہ کی ایک قیمت ہے۔ فرض کرو کہ لا کی ایسی ایک قیمت ضا ہے جہاں $\text{ا} \leq \text{ضا} \leq \text{ب}$ ، تب (۲) کے بائیں جانب کے رکن میں پہلا

مجموعہ اس شکل کا ہوگا

$$\text{فہ}(\text{ا}) \int_{\text{ا}}^{\text{ضا}} \text{سا}(\text{لا})\, \text{ڈلا}$$

اب ہم ثابت کرینگے کہ ح ب صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ ن لاتناہی کی طرف مائل ہو، ایسی حالت میں وقفہ $(\text{لا}_{\text{ر}-۱}، \text{لا}_{\text{ر}})$ بھی ساتھ ہی صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔ وقفہ $(\text{لا}_{\text{ر}-۱}، \text{لا}_{\text{ر}})$ کے اندر فرق $\text{فہ}(\text{لا}_{\text{ر}-۱}) - \text{فہ}(\text{لا})$ یا مثبت ہوگا یا صفر اور (دفعہ ۱۵ مسائل ۶، ۷)

$$|\text{ح ب}| \leqq \sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\text{ن}} \int_{\text{لا}_{\text{ر}-۱}}^{\text{لا}_{\text{ر}}} \{\text{فہ}(\text{لا}_{\text{ر}-۱}) - \text{فہ}(\text{لا})\} |\text{سا}(\text{لا})|\, \text{ڈلا}$$

$$< \sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\text{ن}} \{\text{فہ}(\text{لا}_{\text{ر}-۱}) - \text{فہ}(\text{لا}_{\text{ر}})\} \int_{\text{لا}_{\text{ر}-۱}}^{\text{لا}_{\text{ر}}} |\text{سا}(\text{لا})|\, \text{ڈلا}$$

اب ہم ن کو اتنا بڑا منتخب کرسکتے ہیں (اور ہر وقفہ کو اتنا چھوٹا) کہ ر کی ہر قیمت کے لئے تکملہ

$$\int_{\text{لا}_{\text{ر}-۱}}^{\text{لا}_{\text{ر}}} |\text{سا}(\text{لا})|\, \text{ڈلا}$$

کسی معینہ، اختیاری طور پر چھوٹے مثبت عدد صہ سے کم ہو۔ ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$|\text{ح ب}| < \text{صہ} \sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\text{ن}} \{\text{فہ}(\text{لا}_{\text{ر}-۱}) - \text{فہ}(\text{لا}_{\text{ر}})\} = \text{صہ}\{\text{فہ}(\text{ا}) - \text{فہ}(\text{ب})\}$$

پس معلوم ہوا کہ ح ب کی انتہا صفر ہے اور مسئلہ ثابت ہوا۔

یہ دیکھنا مشکل نہیں کہ اوپر کا ثبوت برقرار رہتا ہے خواہ فہ(لا) اور سا(لا) کے ایسے عدم تسلسلوں کی محدود تعداد وقفہ کے اندر ہو جن کا دفعات ۶۳ تا ۶۵ میں ذکر کیا گیا ہے بشرطیکہ فہ(لا) کے عدم تسلسل محدود ہوں۔

مسئلہ ۲۔ اگر تمام وقفہ $ا \leq لا \leq ب$ میں تفاعل فہ(لا) مسلسل اور یکرنگ ہو اور تفاعل سا(لا) مسلسل ہو تو

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, سا(لا)\, ڈلا = فہ(ا) \int_{ا}^{ضا} سا(لا)\, ڈلا + فہ(ب) \int_{ضا}^{ب} سا(لا)\, ڈلا$$
..........(۲، ا)

$$= فہ(ا) \int_{ا}^{ب} سا(لا)\, ڈلا + \{فہ(ب) - فہ(ا)\} \int_{ضا}^{ب} سا(لا)\, ڈلا$$
..........(۲، ب)

جہاں $ا \leq ضا \leq ب$

مسئلہ (۱) سے یہ مسئلہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر فہ(لا) بڑھتا نہ ہو لیکن یہ مثبت ہو یا منفی تو فہ(لا) − فہ(ب) نہیں بڑھیگا اور مثبت ہوگا اسی طرح اگر فہ(لا) گھٹتا نہ ہو تو فہ(ب) − فہ(لا) نہیں بڑھیگا اور مثبت ہوگا۔ مسئلہ (۱) میں فہ(لا) کی بجائے فہ(لا) − فہ(ب) یا فہ(ب) − فہ(لا) رکھنے سے تھوڑے سے استحالہ کے بعد مساوات (۲، ا) حاصل ہوگی۔ مساوات (۲، ب) صرف ایک اور شکل ہے (۲، ا) کی جو بعض اوقات مفید ثابت ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ اگر $ع = \int_{ب}^{\infty} \frac{جم\, ا لا\, ڈلا}{لا^{ر}}$ ، $و = \int_{ب}^{\infty} \frac{جب\, ا لا\, ڈلا}{لا^{ر}}$

تو ثابت کرو کہ ع مستدق ہے اگر $۰ < ر < ۱$ اور و مستدق ہے اگر $۰ < ر < ۲$ $(ا \geq ۰)$

مسئلہ دفعہ ۶۵ کی رو سے دونوں تکملے نچلی حد پر مستدق ہیں، جب $لا > ۰$ تو تفاعل $\frac{۱}{لا^{ر}}$ دونوں صورتوں میں گھٹنے والا تفاعل ہوتا ہے اسلئے

$$\int_{ھ}^{ک} \frac{جم\, ر لا}{لا^{ر}}\, ور لا = \frac{1}{ھ^{ر}}\int_{ھ}^{ضا} جم\, ر لا\, ور لا + \frac{1}{ک^{ر}}\int_{ضا}^{ک} جم\, ر لا\, ور لا$$

$$= \frac{جب\, ر ضا - جب\, ر ھ}{ر ھ^{ر}} + \frac{جب\, ر ک - جب\, ر ضا}{ر ک^{ر}}$$

اسلئے یہ تعداد کم ہے $\frac{2}{ر ھ^{ر}} + \frac{2}{ر ک^{ر}}$ سے۔ پس اگر $ر > 0$ تو ھ اور ک کے لامتناہی کی طرف مائل ہونے سے یہ انتہا صفر ہوتی ہے۔ اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ و مستدق ہے۔

مثال ۲۔ مشق ۱۲ سوالات ۱۴، ۱۵ کو ثابت کرنے کے لئے ایبل کی لاتساوی استعمال کرو۔

سوال ۱۴ کو لو۔ فرض کرو کہ

$$ع_{ن}^{ر} = \frac{1}{ن+1} جم(ن+1)طہ + \frac{1}{ن+2} جم(ن+2)طہ + \dots + \frac{1}{ن+ع} جم(ن+ع)طہ$$

ایبل کی لاتساوی میں فرض کرو کہ $ل_{ر} = \frac{1}{ن+ر}$، $ع_{ر} = جم(ن+ر)طہ$

تب $س_{ر} = جب\frac{رطہ}{2}\, جم\left(ن + \frac{ر+1}{2}طہ\right) \div جب\frac{طہ}{2}$

اگر طہ صفر نہ ہو اور نہ ہی یہ 2π کا ضعف ہو تو $س_{ر}$، ر کی ہر قیمت کے لئے محدود ہوتا ہے، مثلاً فرض کرو کہ $|س_{ر}|$ کم ہے ج سے۔ اسلئے $|ع_{ن}^{ر}|$ کم ہے $\frac{ج}{ن+1}$ سے اور جب، ن لاتناہی کی طرف مائل ہو تو ع کی ہر قیمت کے لئے یہ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ پس سلسلہ مجوزہ مستدق ہے۔

مشق ۱۸

۱۔ اگر ا اور ب دونوں مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ تکملہ

$$\int_0^\infty \frac{\text{جب ا لا جم ب لا}}{\text{لا}}\ \text{ولا}$$

مساوی ہے $\frac{\pi}{۲}$ کے اگر ا بڑا ہو ب سے اور صفر کے مساوی ہے اگر ا چھوٹا ہو ب سے اور یہ تکملہ $\frac{\pi}{۴}$ مساوی ہے اگر ا = ب

۲۔ ثابت کرو کہ (۱) $\int_0^\infty \frac{\text{جب}^۲\text{لا}}{\text{لا}^۲}\ \text{ولا} = \frac{\pi}{۲}$ (۲) $\int_0^\infty \frac{\text{جب}^۳\text{لا}}{\text{لا}^۳}\ \text{ولا} = \frac{۳\pi}{۸}$

۳۔ ذیل کے تخمینیات کو مرتسم کرو

(۱) $\text{ما} = \int_0^\infty \frac{\text{جب ط جب لاط}}{\text{ط}^۲}\ \text{وط}$ (۲) $\int_0^\infty \frac{\text{جب}^۲\text{ط جب لاط}}{\text{ط}^۳}\ \text{وط}$

۴۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^\infty \frac{\text{جب}^{۲ن+۱}\text{لا}\ \text{ولا}}{\text{لا}} = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \text{جب}^{۲ن}\text{لا}\ \text{ولا} = \frac{۱\times۳\times۵\times\cdots\cdots(۲ن-۱)}{۲\times۴\times۶\times\cdots\cdots۲ن} \times \frac{\pi}{۲}$$

۵۔ اگر $۰ < \text{ع} < ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^\infty \frac{\text{لا}^{\text{ع}-۱} - \text{لا}^{-\text{ع}}}{۱-\text{لا}}\ \text{ولا} = ۲\int_0^۱ \frac{\text{لا}^{\text{ع}-۱} - \text{لا}^{-\text{ع}}}{۱-\text{لا}}\ \text{ولا} = ۲\pi\ \text{مم ع}\ \pi$$

دفعہ ۶۶ (ب) کے موافق عمل کرو اور ذیل کا نتیجہ استعمال کرو [دفعہ ۸۴، مثال ۱ (۵)]

$$\pi\ \text{مم ع}\ \pi = \sum_{\text{ن}=۰}^{\text{ن}=\infty} \left(\frac{۱}{\text{ن}+\text{ع}} - \frac{۱}{\text{ن}+۱-\text{ع}}\right)$$

۶۔ ذیل کی مساواتیں قائم کرو۔ یہ سب دفعہ ۶۶، (ب) کے استحالہ سے حاصل ہوتی ہیں یا مثال (۵) سے۔

(۱) $\int_{0}^{\infty} \frac{لا^{۲م}\, ولا}{۱+لا^{۲ن}} = \frac{\pi}{۲ن\, جب\, \frac{۲م+۱}{۲ن}\pi}$ م، ن مثبت صحیح عدد ہیں اور $م < ن$

(۲) $\int_{0}^{۱} \frac{لا^{ن}+لا^{-ن}}{۱+لا^{۲}}\, ولا = \int_{0}^{۱} \frac{لا^{ن}+لا^{-ن}}{لا+لا^{-۱}}\, \frac{ولا}{لا} = \frac{\pi}{۲}\, قط\, \frac{ن\pi}{۲}$، $-۱<ن<۱$

(۳) $\int_{0}^{\infty} \frac{لا^{ا-۱}-لا^{ب-۱}}{۱-لا}\, ولا = \pi\,(ھم\, ا\pi - ھم\, ب\pi)$: $۰<ا<۱$ ، $۰<ب<۱$

(۴) $\int_{0}^{\infty} \frac{قو^{ن لا}+قو^{-ن لا}}{قو^{لا}+قو^{-لا}}\, ولا = \frac{\pi}{۲}\, قط\, \frac{ن\pi}{۲}$، $-۱<ن<۱$

(۵) $\int_{0}^{\infty} \frac{قو^{ن لا}-قو^{-ن لا}}{قو^{لا}-قو^{-لا}}\, ولا = \frac{\pi}{۲}\, مس\, \frac{ن\pi}{۲}$، $-۱<ن<۱$

(۶) $\int_{0}^{\infty} \frac{جتم\, ا لا\; جتم\, ب لا}{جتم\, لا}\, ولا = \frac{\pi\, جتم\frac{ا\pi}{۲}\, جتم\frac{ب\pi}{۲}}{جتم\, ا\pi + جتم\, ب\pi}$، $-۱<ا\pm ب<۱$

۷- ثابت کرو کہ اگر $۰ < ع < ۱$ تو

$$\int_{0}^{۱} (لا^{ع}+لا^{-ع})\, لوک\,(۱+لا)\, \frac{ولا}{لا} = \frac{\pi}{ع\, جب\, ع\pi} - \frac{۱}{ع^{۲}}$$

۸- ثابت کرو کہ [ملاحظہ ہو دفعہ ۳۸ مثال ۲ (۲)]

$$\int_{0}^{\infty} \frac{جب\, ا لا}{قو^{لا}-قو^{-لا}}\, ولا = \sum_{ن=۰}^{ن=\infty} \frac{ا}{ا^{۲}+(۲ن+۱)^{۲}} = \frac{\pi}{۴}\, مسز\, \frac{ا\pi}{۲}$$

۹- اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ [ملاحظہ ہو مثال ۶ مشق ۸]

$$\int_{0}^{\pi} \text{لا}\ \text{لوک}\,(\text{جب}^{2}\text{لا})\ \text{ولا} = \frac{\pi^{2}}{2}\ \text{لوک}\left(\frac{1}{2}\right)$$

امثلہ ۱۰ تا ۱۸ مناسب ابدالوں سے گاما تفاعلوں میں تحویل ہو سکتی ہیں۔

۱۰- $$\int_{0}^{1} \frac{\text{لا}^{\text{م}-1}\ \text{ولا}}{(1-\text{لا}^{\text{ن}})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}} = \frac{\pi}{\text{ن}\ \text{جب}\frac{\text{م}\pi}{\text{ن}}}$$

۱۱- $$\int_{0}^{1} \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}\ \text{ولا}}{(1+\text{ا}\,\text{لا})(1-\text{لا})^{\text{ن}}} = \frac{\pi}{(1+\text{ا})^{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{ن}\pi}$$

۱۲- $$\int_{0}^{1} \frac{\text{لا}^{\text{م}-1}(1-\text{لا})^{\text{ن}-1}\ \text{ولا}}{(\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا})^{\text{م}+\text{ن}}} = \frac{\text{با}(\text{م}, \text{ن})}{\text{ا}^{\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب})^{\text{م}}}$$

۱۳- $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم}^{2\text{م}-1}\text{لا}\ \text{جب}^{2\text{ن}-1}\text{لا}\ \text{ولا}}{(\text{ا}\,\text{جم}^{2}\text{لا}+\text{ب}\,\text{جب}^{2}\text{لا})^{\text{م}+\text{ن}}} = \frac{\text{با}(\text{م}, \text{ن})}{2\,\text{ا}^{\text{م}}\,\text{ب}^{\text{ن}}}$$

۱۴- $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{مس}^{\text{ک}}\text{لا}\ \text{ولا}}{\text{ا}\,\text{جم}^{2}\text{لا}+\text{ب}\,\text{جب}^{2}\text{لا}} = \frac{\pi\ \text{قط}\frac{\text{ک}\pi}{2}}{2\,\text{ا}^{\frac{1-\text{ک}}{2}}\,\text{ب}^{\frac{1+\text{ک}}{2}}}$$

۱۵- $$\int_{0}^{\pi} \frac{\text{جب}^{\text{ن}-1}\text{لا}\ \text{ولا}}{(\text{ا}+\text{ب}\,\text{جم}\,\text{لا})^{\text{ن}}} = \frac{2^{\text{ن}-1}}{(\text{ا}^{2}-\text{ب}^{2})^{\frac{\text{ن}}{2}}}\ \text{با}\left(\frac{\text{ن}}{2}, \frac{\text{ن}}{2}\right)$$

۱۶- $$\int_{0}^{1} \frac{\text{لا}^{\text{م}-1}+\text{لا}^{\text{ن}-1}}{(1+\text{لا})^{\text{م}+\text{ن}}}\ \text{ولا} = \text{با}(\text{م}, \text{ن})$$

۱۷- $$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{قو}^{2\text{م}\text{لا}}+\text{قو}^{-2\text{م}\text{لا}}}{(\text{قو}^{\text{لا}}+\text{قو}^{-\text{لا}})^{2\text{ن}}}\ \text{ولا} = \frac{1}{2}\ \text{با}(\text{ن}+\text{م}, \text{ن}-\text{م})$$

۱۸ — $$\int_{-1}^{+1} \frac{(\text{۱}+\text{لا})^{\text{۲م}-\text{۱}} (\text{۱}-\text{لا})^{\text{۲ن}-\text{۱}}}{(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})^{\text{م}+\text{ن}}} \, \text{ولا} = \text{۲}^{\text{م}+\text{ن}-\text{۲}} \, \text{با}(\text{م، ن})$$

۱۹ — اگر ذیل کا ہر ایک تکملہ (ل > ۰)

$$\text{ب} = \int_{\text{۰}}^{\infty} \text{ف}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}} + \frac{\text{ل}}{\text{لا}}\right) \text{لوک لا} \, \frac{\text{ولا}}{\text{لا}} \text{، } \text{ق} = \int_{\text{۰}}^{\infty} \text{ف}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}} + \frac{\text{ل}}{\text{لا}}\right) \frac{\text{ولا}}{\text{لا}}$$

مستدق ہو تو ثابت کرو کہ ب = ق لوک ل

۲۰ — ذیل کے منحنی کو مرتسم کرو (ل > ۰)

$$\text{ما} = \int_{\text{۰}}^{\infty} \frac{\text{جب لا طہ جب}^{\text{۲}} \text{ل طہ}}{\text{طہ جب ل طہ}} \, \text{وطہ}$$

۶۹ — علامت تکمل کے اندر اعمال — فرض کرو کہ فا(لا، ما) دو متبوع متغیروں لا، ما کا مسلسل تفاعل ہے ان دو وسعتوں کے اندر

$$\text{ا} \leqq \text{لا} \leqq \text{ب} \text{، } \text{اَ} \leqq \text{ما} \leqq \text{بَ} \quad \text{......} \quad (\text{س})$$

تو تفاعل ف (ما) جس کی تعیین اس تکملہ سے ہوتی ہے

$$\text{ف}(\text{ما}) = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا، ما}) \, \text{ولا} \quad \text{..........} \quad (\text{۱})$$

ما کا ایک مسلسل تفاعل ہوگا [ملاحظہ ہو حسب ذیل]
مسلسل تفاعلوں کی ایک خاصیت جو ہم نے ہمیشہ ضمنی طور پر تسلیم کر لی ہے یعنی یکساں تسلسل وہ اس مسئلہ اور دیگر مسائل کے ثبوت میں اہم حصہ رکھتی ہے۔ اگر وسعتوں (س) میں لا، ما قیمتوں کا کوئی جوڑا ہو تو تسلسل کی ابتدائی تعریف کی رو سے (دفعہ ۸۹ اور ۵۴ حصہ اول) ہم ہمیشہ ایک مثبت عدد ع ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ فرق

$$\left| \text{فا}(\text{لا، ما}_{\text{۱}}) - \text{فا}(\text{لا، ما}) \right| \quad \text{..........} \quad (\text{۲})$$

دی ہوئی مقدار صہ سے کم ہو (جہاں صہ کا مفہوم حسب معمول ہے) جبکہ |لا۲ - لا۱| اور |ما۲ - ما۱| میں سے ہر ایک عا سے کم ہو۔ اگر لا، ما کی بجائے قیمتوں کا اور جوڑا (لا، ما) کیا جائے تو بالعموم ہمیں عا کی ایک اور نئی قیمت منتخب کرنا ہوگی۔ اب فا(لا، ما) کے یکساں تسلسل کا یہ مفہوم ہے (مقابلہ کرو دفعہ ۲۴ کے ساتھ) کہ جب صہ مقرر کرلیا جائے تو ہمیشہ ایک عا معلوم ہو سکتا ہے اس طور پر کہ فرق (۲) صہ سے کم ہو بشرطیکہ |لا۲ - لا۱| اور |ما۲ - ما۱| میں سے ہر ایک عا سے کم ہو خواہ جوڑا (لا، ما) کسی طور پر بھی منتخب کیا جائے۔

[جب لا = ا یا ب اور ما = ا یا ب تو جو ضروری ترمیمات عمل میں لانا چاہئیں ہم انہیں طالب علم پر چھوڑتے ہیں۔]

یہ ہم مان لینگے کہ تسلسل یکساں ہے۔

ف(ما) کا تسلسل ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں۔ کیونکہ

ف(ما + ھ) - ف(ما) = ∫ (ا سے ب) {فا(لا، ما + ھ) - فا(لا، ما)} ءلا ......(۳)

خواہ لا کی وقفہ (ا، ب) کے اندر کوئی سی قیمت ہو ہم ھ کو ہمیشہ اسقدر چھوٹا منتخب کر سکتے ہیں کہ |فا(لا، ما + ھ) - فا(لا، ما)|، صہ سے کم ہو اور اسلئے |ف(ما + ھ) - ف(ما)| > صہ(ب - ا) اس سے ظاہر ہے کہ ف(ما) مسلسل ہے اور یہ ما کی ہر ایک قیمت کے لئے مسلسل ہے وقفہ (ا، ب) کے درمیان۔

اب ہم ذیل کا مسئلہ ثابت کرتے ہیں، ا، ب، ما پر منحصر نہیں۔

مسئلہ ا۔ اگر فا(لا، ما) اور اس کا جزوی مشتق فاما(لا، ما) مستطیل (م) کے اندر بے تعلق متغیروں (لا، ما) کے مسلسل تفاعل ہوں تو تفاعل ف(ما) کا مشتق ف´(ما) جس کی تعیین (۱) سے

ہوتی ہے ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگا

$$ف'(ما) = \int_و^ب \frac{جف\ فا(لا، ما)}{جف\ ما} \ ورلا \quad \ldots\ldots (۴)$$

یہ مسئلہ "علامت تکمل کے اندر تفرق" کے نام سے موسوم ہے اور متغیر ما کو بعض اوقات متبدل کہا جاتا ہے۔

دفعہ ۳۷ حصہ اول کے مسئلہ اوسط قیمت کی رو سے

$$فا(لا، ما+ھ) - فا(لا، ما) = ھ\ فا_ما(لا، ما')$$

$$= ھ\ فا_ما(لا، ما) + ھ\{فا_ما(لا، ما') - فا_ما(لا، ما)\}$$

جہاں ما' کوئی ایک قیمت ہے ما اور ما + ھ کے درمیان۔
(۳) میں مندرج کرنے اور ھ پر تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں

$$\frac{ف(ما+ھ) - ف(ما)}{ھ} = \int_و^ب فا_ما(لا، ما)\ ورلا + \int_و^ب \{فا_ما(لا، ما') - فا_ما(لا، ما)\}\ ورلا \quad \ldots\ldots (۵)$$

لیکن ھ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے | فا_ما (لا، ما') - فا_ما (لا، ما) | کو اسقدر کم کیا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں خواہ وقفہ (ا، ب) کے اندر لا کی کوئی قیمت ہو۔ اس لئے (۵) میں آخری تکملہ ھ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور ہمیں مساوات (۴) حاصل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ ا اور ب دونوں ما کے مسلسل تفاعل ہیں مسئلہ (۱) کے شرائط برقرار ہیں اور $\frac{ورا}{ورما}$، $\frac{ورب}{ورما}$ مسلسل ہیں۔ تو ف (ما) کا پورا مشتق (دفعہ ۹۰ حصہ اول) کی رو سے ہے

$$\frac{ورف}{ورما} = \frac{جف\ ف}{جف\ ا}\frac{ورا}{ورما} + \frac{جف\ ف}{جف\ ب}\frac{ورب}{ورما} + \frac{جف\ ف}{جف\ ما}$$

ے۔ فا (ر، ما) فر ر / فر ما + فا (ب، ما) فر ب / فر ما + جف ف / جف ما ...... (۶)

جہاں جف ف / جف ر ، جف ف / جف ب دفعہ ۶۳ (۳) کے موافق معلوم کئے گئے ہیں اور جف ف / جف ما اوپر کے تکملہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے۔

ذیل کا مسئلہ دفعہ ۲۶ میں ثابت کیا گیا ہے لیکن اُس دفعہ کے تخیلات سے علاوہ اسے قائم کرنا علم آموز ہوگا۔

مسئلہ ۲۔ اگر فا (لا، ما) متبوع متغیروں لا، ما کا مسلسل تفاعل ہو معتوں (س) میں اور اگر

فہ (لا، ما) = ∫ر^ما فر و ∫ر^لا فا (ع، و) فر ع .... (۷)

تو جف^۲ فہ / جف لا جف ما = فا (لا، ما) = جف^۲ فہ / جف ما جف لا ...... (۸)

اور ذیل کے تکملے ایک دوسرے کے مساوی ہیں

ف = ∫ر^ب فر ما ∫ر^ب فا (لا، ما) فر لا ، ق = ∫ر^ب فر لا ∫ر^ب فا (لا، ما) فر ما

.... (۹)

دوسرے تکملے ف، ق دراصل مکرر یا متواتر تکملے ہیں جیسا کہ (۸) میں کے مشتق متواتر ہیں۔ دفعہ ۲۶ کے نتائج کو نہیں استعمال کیا جائیگا۔

فرض کرو کہ سا (لا، و) = ∫ر^لا فا (ع، و) فر ع، فہ (لا، ما) = ∫ر^ما سا (لا، و) فر و

تب سا (لا، و) مسلسل ہے اور

جف فہ / جف ما = جف / جف ما ∫ر^ما سا (لا، و) فر و = سا (لا، ما) = ∫ر^لا فا (ع، ما) فر ع

$$\frac{جف^2 فہ}{جف لا جف ما} = \frac{جف}{جف لا}\int_{ر}^{لا} فا(ع، ما) \, ر ع = فا(لا، ما)$$

نیز مسئلہ اکی رو سے

$$\frac{جف فہ}{جف لا} = \frac{جف}{جف لا}\int_{ر}^{ما} سا(لا، و) \, ر و = \int_{ر}^{ما} \frac{جف سا(لا، و)}{جف لا} \, ر و$$

$$= \int_{ر}^{ما} فا(لا، و) \, ر و$$

$$\frac{جف^2 فہ}{جف ما جف لا} = \frac{جف}{جف ما}\int_{ر}^{ما} فا(لا، و) \, ر و = فا(لا، ما)$$

جس سے مساوات (۸) قائم ہوتی ہے۔

اسکے بعد ف کے تکمل میں فا(لا، ما) کی بجائے $\frac{جف^2 فہ}{جف لا جف ما}$ رکھو تب

$$\int_{ر}^{ب} فا(لا، ما) \, ر لا = \left[\frac{جف فہ(لا، ما)}{جف ما}\right]_{ر}^{ب} = \frac{جف فہ(ب، ما)}{جف ما} - \frac{جف فہ(ر، ما)}{جف ما}$$

اور

$$ف = \int_{ر'}^{ب'} \frac{جف فہ(ب، ما)}{جف ما} \, ر ما - \int_{ر'}^{ب'} \frac{جف فہ(ر، ما)}{جف ما} \, ر ما$$

$$= فہ(ب، ب') - فہ(ب، ر') - فہ(ر، ب') + فہ(ر، ر')$$

ق کے تکمل میں فا(لا، ما) کی بجائے $\frac{جف^2 فہ}{جف ما جف لا}$ رکھو اور ق کے لئے ہمیں عین وہی قیمت حاصل ہوتی ہے جو ف کے لئے حاصل ہوئی۔

تفاعل ف (ما) کو لیکر جو (۱) سے متعین ہوتا ہے ہم مساوات ف = ق کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\int_{ر'}^{ب'} ف(ما) \, ر ما = \int_{ر}^{ب} ر لا \int_{ر'}^{ب'} فا(لا، ما) \, ر ما \qquad \text{.......(۱۰)}$$

(۱۰) میں جو مسئلہ منضبط ہے اسے "علامت تکمل کے اندر تکمل" کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔

یہ ٹھیک طور پر پیش نظر رہے کہ اس تمام دفعہ میں اعداد ا، ب، ا، ب محدود ہیں۔ ذیل کی مثالوں سے جن طریقوں کی توضیح ہوتی ہے وہ تکملوں کے حل میں اکثر مفید ثابت ہوتے ہیں۔ اور مثالیں بعد میں دی جائیگی۔

مثال ۱۔ $\int \frac{\text{ولا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)^2}$ کی قیمت معلوم کرو

اس مساوات پر غور کرو

$$\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \frac{1}{\text{ع}^2+\text{ا}^2}\,\text{وع} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

ا کو متبدل مان کر ہم بلحاظ ا کے تفرق کرتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \frac{-2\text{ا}\,\text{وع}}{(\text{ع}^2+\text{ا}^2)^2} = -\frac{1}{\text{ا}^2}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ا}}\times\frac{1}{1+\text{لا}^2/\text{ا}^2}\times\left(-\frac{\text{لا}}{\text{ا}^2}\right)$$

یا
$$\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \frac{\text{وع}}{(\text{ع}^2+\text{ا}^2)^2} = \frac{1}{2\text{ا}^3}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{1}{2\text{ا}^2}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2+\text{ا}^2}$$

اوپر کی قیمت $\frac{1}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)^2}$ کے اس تکمل کی قیمت ہے جو صفر ہوتا جبکہ لا = ۰؛ ع کو تکمل کا متغیر صرف اس لئے مانا گیا ہے کہ عمل صراحت سے پیش ہو سکے لیکن نامحدود تکملہ کے حاصل کرنے میں متغیر کو بدلنے کی ضرورت نہیں ہوگی۔

مثال ۲۔ $\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{2}} \text{لوک}\,(1-\text{ز}^2\,\text{جب}^2\,\text{لا})\,\text{ولا}$ کو محسوب کرو $\text{ز}^2 < 1$

تکملہ کو ع سے تعبیر کرو اور اسے بلحاظ ز کے تفرق کرو

$$\frac{و ع}{و ز} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2 ز جب^2 لا فر لا}{1 - ز^2 جب^2 لا} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{ز} \cdot \frac{2}{ز} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{فر لا}{1 - ز^2 جب^2 لا}$$

ابدال و = مم لا کے ذریعہ اوپر کا تکملہ فوراً حاصل ہوتا ہے' اس طرح

$$\frac{و ع}{و ز} = \frac{\pi}{ز} - \frac{\pi}{ز \sqrt{1 - ز^2}}$$

بلحاظ ز کے تکمل کرنے اور یہ ملحوظ رکھنے سے کہ ع = ۰ جبکہ ز = ۰ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ع = \pi \; لوک \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - ز^2}}{2} \right\}$$

یہ تکملہ مسلسل رہتا ہے بشمول ز = ۱' ز کو ۱ کے مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} لوک (جم لا) فر لا = \frac{\pi}{2} لوک \left(\frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} لوک (جب لا) فر لا$$

۷۰ ۔ تکملوں کا یکساں استدقاق ۔ جب تکملہ (۱) دفعہ ۶۹ کی حد ب (یا ا) لا انتہا ہو تو اس دفعہ کے مسائل کی مزید تحقیق لازم آتی ہے۔ جو بحث ذیل میں درج ہے اس میں ہم نے بالکل وہی طریق عمل اختیار کیا ہے جو (Ch. J. de la Vallee Poussin) نے اپنے مکتوب میں دیا ہے۔

Etude des integrales a limites, infinies (Annales de la societe Scientifique de Bruxelles Vol 16 (1891-2) pp 150-180)

نیز پروفیسر اوسگوڈ کے ایک مضمون کا بھی یہاں حوالہ دیا جاتا ہے
(Problems in Infinite Series and Definite Integrals) (Annals)

of Math (2nd Series) (Vol 3 pp 129-146)

طالب علم ذیل کی بحث کو دفعات ۴۲، ۴۶ کے ساتھ مقابلہ کرے۔ مختلف سلسلوں کے قیام کے لئے جو شرائط بیان کئے گئے ہیں وہ محض کافی ہیں ضروری نہیں۔

نوٹ۔ جب تک کہ اسکے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے تکمل جو بالعموم فا(لا، ما) سے تعبیر ہوگا دو بے تعلق متغیروں لا، ما کا ان کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے مسلسل تفاعل خیال کیا جائیگا۔ وقفہ یا وسعت (ا، ب) سے بالعموم بند وقفہ مراد ہوگا دفعہ ۵۴ حصہ اول۔ اگر اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے۔ علامت صہ سے اختیاری چھوٹی مثبت مقدار تعبیر ہوگی۔ اگر ان قرار دادوں کو ملحوظ رکھا جائے تو بہت سے تکرار سے باہم بچ جائینگے۔

تعریف۔ تکملہ $\int^{\infty}$ فا(لا، ما) ء لا .... (ا)

تمام وسعت ا ≦ ما ≦ ب میں یکساں طور پر مستدق کہلاتا ہے اگر صہ کے دئے جانے کی صورت میں ایک ایسا عدد م معلوم کرلینا ممکن ہو جو ما پر منحصر نہ ہو اور ف کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو م سے بڑی ہو

$$\left| \int_{ف}^{\infty} فا(لا، ما)\, ء لا \right| < صہ \quad ......(ب)$$

ذیل کے اشارے مفید ہونگے۔ اگر تکملہ (ا) محض مستدق ہو تو م اس طور پر مقرر ہو سکتا ہے کہ لا تساوی (ب) پوری ہو جبکہ ف > م لیکن عام طور پر م صرف صہ پر ہی منحصر نہیں ہوگا بلکہ ما پر بھی۔ اگر م صرف صہ کا تفاعل ہو جبکہ ا ≦ ما ≦ ب تو تکملہ (ا) وقفہ (ا، ب) میں یکساں طور پر مستدق ہوگا۔

ایسا ہو سکتا ہے کہ مرصرف صہ کا تفاعل ہو ما کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو ≦ ر؍ ایسی صورت میں تکملہ (ا) بلا حد وقفہ ما ≦ ا میں یکساں طور پر مستدق ہوگا۔ لیکن یہ بھی ممکن ہے کہ مرصرف صہ کا تفاعل ہو خواہ کوئی معین قیمت (جو کتنی بڑی ہو سکتی ہے) ب کو دی جائے اور ساتھ ہی ہر قیمت ما ≦ ر کے لئے یہ صرف صہ کا تفاعل نہ ہو۔ مد اس صورت میں ب کے ساتھ لاانتہا ہی کی طرف جا سکتا ہے، استدقاق اس لئے لاانتہا سست یا بطی ہوگا (مقابلہ کرو دفعہ ۹۷ کے ساتھ) ایسی حالت میں اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ تکملہ (ا) یکساں طور پر مستدق ہے اختیاری وقفہ (ر، ب) میں۔

تکملہ $\int_{0}^{\infty}$ و سالا فرلا یکساں طور پر مستدق ہے بے حدود وقفہ ما ≦ ر ›.

میں لیکن تکملہ $\int_{0}^{\infty}$ و ما فرلا یکساں طور پر مستدق ہے صرف ایک اختیاری وقفہ ۔< ر ≦ ما ≦ ب میں جہاں ب کوئی معین عدد ہے خواہ یہ کتنا ہی بڑا ہو۔

مسئلہ۔ تکملہ (ا) تمام وقفہ (ر، ب) کے اندر یکساں طور پر مستدق ہوگا اگر ایک ایسے تفاعل فہ (لا) کا وجود ہو جو ما پر منحصر نہ ہو اور ایسا ہو کہ ر ≦ ما ≦ ب کے لئے

(عما) فہ (لا) ≦ ۔ جبکہ لا ≦ ا

(بہ) | فا (لا، ما) | ≦ فہ (لا) جبکہ لا ≦ ا

(جہ) تکملہ $\int_{ا}^{\infty}$ فہ (لا) فرلا مستدق ہو۔

ثبوت آسان ہے۔

| $\int_{ح}^{\infty}$ فا (لا، ما) فرلا | ≦ $\int_{ح}^{\infty}$ | فا (لا، ما) | فرلا > $\int_{ح}^{\infty}$ فہ (لا) فرلا

اور شرط (جہ) کی رُو سے ہم م کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں (جو ما پر منحصر نہیں) کہ اگر ن > م تو موخر الذکر تکملہ صہ سے کم ہو۔
یہ مسئلہ دفعہ ۲۴ کے مسئلہ ۳ کا جواب ہے۔ وقفہ (ا، ب) محدود یا نا محدود ہو سکتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر تمام وقفہ (ا، ب) میں

$$\text{فا}(\text{لا}،\text{ما}) = \text{ف}(\text{لا})\ \text{سا}(\text{لا}،\text{ما})$$

جہاں $\text{سا}(\text{لا}،\text{ما})$ محدود ہے اور $\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا})\ \text{و}\text{لا}$ مطلق طور پر مستدق تو تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہو گا تمام وقفہ (ا، ب) میں۔
اگر $|\text{سا}(\text{لا}،\text{ما})| < \text{س}$ (مستقل)، تو رکھو

$$\text{فہ}(\text{لا}) = \text{س}\,|\text{ف}(\text{لا})|$$

اور مسئلہ لگ سکتا ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ لکھو $\text{فا}(\text{لا}،\text{ما}) = \text{لا}^{-\text{ک}} \times \text{لا}^{\text{ک}}\ \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})$۔ اگر $\text{لا}^{\text{ک}}\ \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})$ لا، ما کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے محدود ہو تو تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہو گا بشرطیکہ ک > ۱ (دفعہ ۶۴)

مثال۔ $\text{جا}(\text{ما}) = \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ما}-1}\ \text{قو}^{-\text{لا}}\ \text{و}\text{لا}$ تمام اختیاری وقفہ (ا، ب) میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے کیونکہ $\text{لا}^{\text{ما}-1}\ \text{قو}^{-\text{لا}} = \text{لا}^{-2}\left(\text{لا}^{\text{ما}+1}\ \text{قو}^{-\text{لا}}\right)$ اور $\text{لا}^{\text{ما}+1}\ \text{قو}^{-\text{لا}}$ محدود ہے۔

اگر $0 < \text{ما} < 1$ تو متکمل نچلی حد پر غیر مسلسل ہے لیکن تکمل بالحصص کے عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جا}(\text{ما}) = \frac{1}{\text{ما}} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ما}}\ \text{قو}^{-\text{لا}}\ \text{و}\text{لا}$$

اور یہ تکملہ تمام وسعت $\text{ا} \leq \text{ما} \leq \text{ب}$ کے اندر یکساں طور پر مستدق ہے۔
نوٹ ترتیم اس کا نافاعل کے لئے جبار(ما) = (ج) ۲

۱۷ - تسلسل اور حدود۔ اب ہم چند مسائل پر بحث کرینگے

جو اساسی اہمیت رکھتے ہیں۔
مسئلہ ۱ - اگر تکملہ

$$\text{ف(ما)} = \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) ء لا}$$

یکساں طور پر مستدق ہو تمام وسعت $\text{ا} \leq \text{ما} \leq \text{ب}$ میں تو اس تمام وسعت میں یہ ما کا مسلسل تفاعل ہوگا۔
ثبوت مسئلہ ا دفعہ ۱۴ کے ثبوت کے متشابہ ہے اور طالب علم کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔
مسئلہ ۲ - اگر سا(لا) مسلسل ہو جبکہ $\text{لا} \geq \text{ا}$ اور تکملہ

$$\text{ت} = \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{سا(لا) ء لا}$$

مستدق ہو، تو ذیل کا تکملہ، جبکہ ما > ۰

$$\text{ف(ما)} = \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{قو}^{-\text{مالا}}\ \text{سا(لا) ء لا}$$

مستدق ہوگا اور $\lim_{\text{ما}\to 0}$ ف(ما) = ت
چونکہ قو^{-مالا} گھٹنے والا تفاعل ہے، اسلئے جب کہ ب مثبت ہو اور $\text{ا} < \text{ب} \leq \text{ضا} \leq \text{ج}$

$$\int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \text{قو}^{-\text{مالا}}\ \text{سا(لا) ء لا} = \text{قو}^{-\text{ماب}} \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{سا(لا) ء لا} + \text{قو}^{-\text{ماج}} \int_{\text{ضا}}^{\text{ج}} \text{سا(لا) ء لا} \quad \ldots (1)$$

اجزائے ضربی $\text{قو}^{-\text{ماب}}$، $\text{قو}^{-\text{ماج}}$ محدود ہیں اور چونکہ تکملہ ت مستدق ہے اسلئے (۱) کے بائیں جانب کے دونوں تکملے صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں جیسے ب اور ج لانتناہی کی طرف مائل ہوں۔ تکملہ ف (ما) اسلئے مستدق ہے (جیساکہ اور طرح بھی ظاہر ہے)۔

اب فرض کرو کہ ج مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے اور ب محدود رہتا ہے۔ چونکہ $\text{قو}^{-\text{ماج}}$ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے اسلئے (۱) سے ہم دیکھتے ہیں

$$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{قو}^{-\text{مالا}}\,\text{سا(لا)}\,\text{ولا} = \text{قو}^{-\text{ماب}} \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{سا(لا)}\,\text{ولا}،\quad \text{ضا} \geq \text{ب}$$

(ضا کی قیمت بالعموم ج کے ساتھ بدلیگی) اور اس لئے

$$\text{ف(ما)} = \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{قو}^{-\text{مالا}}\,\text{سا(لا)}\,\text{ولا} + \text{قو}^{-\text{ماب}} \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{سا(لا)}\,\text{ولا} \quad \ldots\ldots(۲)$$

$$\text{اب لو}\quad \text{ت} = \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{سا(لا)}\,\text{ولا} + \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{سا(لا)}\,\text{ولا} \quad \ldots\ldots(۳)$$

$$\text{پس}\quad \text{ف(ما)} - \text{ت} = \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} (\text{قو}^{-\text{مالا}} - ۱)\,\text{سا(لا)}\,\text{ولا} + \text{قو}^{-\text{ماب}} \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{سا(لا)}\,\text{ولا}$$

$$- \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{سا(لا)}\,\text{ولا} \quad \ldots\ldots(۴)$$

اب چونکہ ت مستدق ہے اور $\text{قو}^{-\text{ماب}}$ محدود ہے اس لئے ہم ب کو اتنا بڑا منتخب کرسکتے ہیں کہ (۴) کے بائیں جانب کی دوسری اور تیسری رقمیں تعداداً اتنی چھوٹی ہوں جتنا ہم چاہیں۔ ب کے لئے ایسا انتخاب کرو

اور اس کو اس قیمت پر ثابت رکھو۔ اب ما کو صفر کے اسقدر قریب لو کہ (۴) کے بائیں جانب کا پہلا تکملہ تعداداً اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔ پس معلوم ہوا کہ ما کو صفر کے اتنا قریب لیا جا سکتا ہے کہ |ف(ما) - ت| اسقدر چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

یہ مسئلہ تکملوں کی قیمتیں دریافت کرنے میں بڑا مفید ثابت ہوتا ہے۔ اگلا مسئلہ زیادہ عام ہے اور دوسرے تکملوں کی صورت میں خاص اہمیت رکھتا ہے اگرچہ فی الحال اس پر سے سرسری طور پر گذر جانا کافی ہوگا۔

مسئلہ ۳۔ فرض کرو کہ ف (لا، ما) مسلسل تفاعل ہے لا، ما کا ستون لا ≧ ا، اور ما ≧ ر کے لئے۔ اگر (۱) تکملہ

$$\text{سا}(\text{ما}) = \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}،\text{ما})\, \text{د لا}$$

یکساں طور پر مستدق ہو ہر ما کے لئے جبکہ ما ≧ ر اور اگر (۲) ما کے مائل بہ لاتناہی ہونے سے ف (لا، ما) یکساں طور پر مستدق ہو ایک معین انتہا فہ (لا) کی طرف ہر ایسے لا کے لئے جبکہ ا ≦ لا ≦ ب جہاں ب کوئی دیا ہوا عدد ہو سکتا ہے (خواہ یہ کتنا بڑا ہو) تو

$$\text{نہا}_{\text{ما}\to\infty} \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}،\text{ما})\, \text{د لا} = \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{د لا} = \int_{\text{ا}}^{\infty} [\text{نہا}\ \text{ف}(\text{لا}،\text{ما})]\, \text{د لا}$$

سب سے پہلے ہم ثابت کرتے ہیں کہ سا(ما) ایک معین انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ما کی دو قیمتیں ما اور ما' ہیں۔ تب

$$\text{سا}(\text{ما}) - \text{سا}(\text{ما}') = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \{\text{ف}(\text{لا}،\text{ما}) - \text{ف}(\text{لا}،\text{ما}')\}\, \text{د لا} + \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}،\text{ما})\, \text{د لا} - \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{ف}(\text{لا}،\text{ما}')\, \text{د لا}$$

.... (۵)

= ل۱ + ل۲ - ل۳ (فرض کرو)

شرط (۱) کی رو سے ہم ب کو اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ ما، ما' کی قیمتیں خواہ کچھ ہوں تکملوں (ل۲) اور (ل۳) میں سے ہر ایک کی قیمت $\frac{\text{ص}}{۳}$ سے کم ہو

ب کی ایسی قیمت منتخب کرو اور پھر اسے ثابت رکھو۔ شرط (۲) کی رو سے
ہم ما کی قیمت اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ وقفہ (ا، ب) میں لا کی
خواہ کچھ ہی قیمت ہو فرق | ف (لا، ما) - ف (لا، ماَ) | کم ہو صہ / ۳ (ب - ا)
سے بشرطیکہ ہر دو ما، ماَ بڑے ہوں ما سے۔ مختص یہ اس امر کے لئے شرط
ہے کہ ف (لا، ما) یکساں طور پر ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ
ما لاانتہاہی کی طرف مائل ہو۔ اگر ما کا اس طور پر انتخاب کیا جائے تو
| لہ | کم ہوگا صہ / ۳ سے۔ پس اگر ما، ماَ بڑے ہوں ما سے تو فرق
| سا (ما) - سا (ماَ) | کم ہوگا صہ سے۔ دوسرے الفاظ میں جب
ما لاانتہاہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو سا (ما) ایک معین انتہا کی
طرف مائل ہوتا ہے۔ اس انتہا کو پ سے تعبیر کرو۔
اب ہم ثابت کرینگے کہ

پ = ∫ (ا سے ∞ تک) فہ (لا) ءلا

ہم لکھتے ہیں (ب فی الحال غیر معین ہے)

∫ (ا سے ∞ تک) فہ (لا) ءلا - پ = ∫ (ا سے ب تک) { فہ (لا) - ف (لا، ما) } ءلا

+ [∫ (ا سے ب تک) ف (لا، ما) ءلا - ∫ (ا سے ∞ تک) ف (لا، ما) ءلا] + [∫ (ا سے ∞ تک) ف (لا، ما) ءلا - پ]

= عما + بما + جما (مانو)

چونکہ سا (ما) کی انتہا پ ہے ہم ما کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ
کہ اگر ما > ما تو | جما | < صہ / ۳ ۔ شرط (۱) کی رو سے ہم ب کو
اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر با > ب تو | بما | < صہ / ۳ خواہ
ما کی کچھ ہی قیمت ہو۔ اس شرط کے ماتحت ب کی قیمت منتخب کر کے شرط (۲) کی رو سے

ہم ما کو اس طور پر منتخب کرسکتے ہیں کہ اگر ما > ما تو |ع ما| < صہ/۳ پس اگر ما بڑا ہو ما اور ما سے اور ب کوئی عدد ہو بڑا ب سے تو

| ∫ فہ (لا) فرلا − پ | < صہ .... (۶)

چونکہ اس لا تساوی میں ما شامل نہیں ہوتا ہم آسان عبارت میں اسے یوں بیان کرسکتے ہیں کہ خواہ صہ کسقدر چھوٹا ہو ب معلوم ہوسکتا ہے کہ اگر ب > ب تو لا تساوی (۶) پوری ہوتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں جیسے ب لاانتہاہی کیطرف مائل ہوتا ہے تکملہ ∫ فہ (لا) فرلا مائل بہ پ ہوتا ہے۔ مسئلہ اس طرح ثابت ہوتا ہے۔

۷۲۔ علامت تکمل کے اندر اعمال۔ اب ہم دفعہ ۶۹ کے مسئلوں کو وسعت دینگے، طالب علم کو نوٹ دفعہ ۷۰ کی طرف توجہ دلائی جاتی ہے۔

مسئلہ ۱۔ اگر تکملہ

ف (ما) = ∫ فا (لا، ما) فرلا .... (۱)

یکساں طور پر سندق ہو پوری وسعت ا ≤ ما ≤ ب میں تو

∫ ف (ما) فرما = ∫ فرما ∫ فا (لا، ما) فرلا = ∫ فرلا ∫ فا (لا، ما) فرما ...... (۲)

جہاں ما کوئی معین عدد ہے وقفہ (ا، ب) میں۔

جب تکمل کے حدود محدود مستقل ہوں تو تکمل کی ترتیب کوئی بھی ہوسکتی ہے، اسلئے

$$\int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{دلا} \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{فا}(\text{لا},\text{ما})\,\text{دما} = \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{دما} \int_{\text{ر}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا},\text{ما})\,\text{دلا} = \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{دما} \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا},\text{ما})\,\text{دلا}$$

$$- \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{دما} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا},\text{ما})\,\text{دلا}$$

فرض کرو کہ ب مائل بہ لاانتہا ہوتا ہے، تب

$$\int_{\text{ر}}^{\infty} \text{دلا} \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{فا}(\text{لا},\text{ما})\,\text{دما} = \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{ف}(\text{ما})\,\text{دما} - \text{نہا}_{\text{ب}\to\infty} \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{دما} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا},\text{ما})\,\text{دلا}$$

لیکن چونکہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے پورے وقفہ $(\text{رَ},\text{بَ})$ میں اس لئے ہم م منتخب کر سکتے ہیں (جو ما پر منحصر نہ ہو) اور جبکہ ب > م تو

$$\left|\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا},\text{ما})\,\text{دلا}\right| < \text{صہ} \quad \text{اور} \quad \left|\int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{دما} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا},\text{ما})\,\text{دلا}\right| < \text{صہ}(\text{ما}-\text{ر})$$

اسلئے جیسے ب مائل بہ لاانتہا ہوتا ہے موخر الذکر تکملہ مائل صفر ہوتا ہے۔ مسئلہ اس طرح ثابت ہوتا ہے۔

یہ قابل توجہ ہے کہ علامت تکمل کے اندر تکمل کرنے سے جو نیا تکملہ حاصل ہوتا ہے وہ خود وسعت $\text{رَ} \leq \text{ما} \leq \text{بَ}$ کے اندر یکساں طور پر مستدق ہے۔

اس مسئلہ کی توسیع مسئلہ (۲) دفعہ ۳۷ میں کی گئی ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر تکملہ $\int_{\text{ر}}^{\infty} \frac{\text{جف}\ \text{فا}(\text{لا},\text{ما})}{\text{جف}\ \text{ما}}\,\text{دلا}$ یکساں طور پر مستدق ہو تمام سعت $\text{رَ} \leq \text{ما} \leq \text{بَ}$ میں تو یہ تکملہ (۱) کا مشتق ہوگا۔

کیونکہ اگر $\text{فہ}(\text{ما}) = \int_{\text{ر}}^{\infty} \frac{\text{جف}\ \text{فا}(\text{لا},\text{ما})}{\text{جف}\ \text{ما}}\,\text{دلا}$

تو مسئلہ (۱) کی رو سے

$$\int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{فہ}(\text{ما})\,\text{و}\,\text{ما} = \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{و}\,\text{لا} \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \frac{\text{جف فا}(\text{لا، ما})}{\text{جف ما}}\,\text{و}\,\text{ما} = \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا، ما})\,\text{و}\,\text{لا} - \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا، ر})\,\text{و}\,\text{لا}$$

یعنی $\int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{فہ}(\text{ما})\,\text{و}\,\text{ما} = \text{ف}(\text{ما}) - \text{ف}(\text{ر})$

بلحاظ ما کے تفرق کرنے سے $\text{فہ}(\text{ما}) = \text{فَ}(\text{ما})$۔

اب ہم ان مسائل کو بعض مشہور تکملوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں لگائینگے، جب اس امر کا ثبوت نہ درج کیا جائے کہ تکملہ یکساں طور پر مستدق ہے تو طالب علم اسے بآسانی خود بہم پہنچا سکیگا۔ اوسط قیمت کے مسئلے اور تکمل بالحصص کا عمل یکساں استدقاق کے جانچنے میں اکثر مفید ہوگا (متغیر کی تبدیلی بھی) بعض اوقات کارآمد ہوگی۔
(نیز ملاحظہ ہو دفعہ ۴۷ کے شروع کی عبارت)

مثال ۱۔ فرض کرو کہ $\text{ع} = \int_{۰}^{\infty} \text{و}^{-\text{لہ لا}} \frac{\text{جب ما لا}}{\text{لا}}\,\text{و}\,\text{لا}،\ \text{لہ} > ۰$۔
بلحاظ ما کے تفرق کرو، اس لئے

$$\frac{\text{و ع}}{\text{و ما}} = \int_{۰}^{\infty} \text{و}^{-\text{لہ لا}}\,\text{جم ما لا}\,\text{و}\,\text{لا} = \frac{\text{لہ}}{\text{لہ}^2 + \text{ما}^2}$$

اس مساوات کو بلحاظ ما کے تکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ع} = \text{سس}^{-1}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لہ}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

کیونکہ ع = ۰ جبکہ ما = ۰۔
جب، لہ = ۰ تو تکملہ مستدق ہوتا ہے، اس لئے مسئلہ (۲) دفعہ ۱، کی رو سے

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جب ما لا}}{\text{لا}}\,\text{و}\,\text{لا} = \text{نہا}_{\text{لہ}\to ۰}\ \text{سس}^{-1}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لہ}}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots (2)$$

مثبت علامت لینی چاہئے اگر ما > ۰۔ اور − اگر ما < ۰، اگر ما = ۰ تو تکملہ صفر ہوگا۔

مثال ۲ - $\int_{0}^{\infty} \frac{قو^{-ا لا} - قو^{-ب لا}}{لا} \, ولا = لوک \frac{ب}{ا}$ ، $ب > ا > ۰$.

ذیل کے تکملہ پہ غور کرو جبکہ $ما \geq ج > ۰$.

$$\int_{0}^{\infty} قو^{-ما لا} \, ولا = \frac{1}{ما}$$

اگر $ا \geq ج$ جہاں ج ایک ثابت مثبت عدد ہے تو ہم بلحاظ ما کے تکمل کر سکتے ہیں $ما = ا$ سے $ما = ب > ا$ تک، اسلئے

$$\int_{0}^{\infty} \frac{قو^{-ا لا} - قو^{-ب لا}}{لا} \, ولا = لوک \frac{ب}{ا}$$

مثال ۳ - $\int_{0}^{\infty} \frac{جم ا لا - جم ب لا}{لا} \, ولا = لوک \left(\frac{ب}{ا}\right)$ ، $ب > ۰$ ، $ا > ۰$.

اگر $لہ > ۰$ تو $\int_{0}^{\infty} قو^{-لہ لا} \, جب \, ما لا \, ولا = \frac{ما}{لہ^2 + ما^2}$

بلحاظ ما کے تکمل کرو $ما = ا$ سے $ما = ب$ تک، اس طرح

$$\int_{0}^{\infty} قو^{-لہ لا} \, \frac{جم ا لا - جم ب لا}{لا} \, ولا = \frac{1}{2} لوک \left(\frac{لہ^2 + ب^2}{لہ^2 + ا^2}\right)$$

یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ تکملہ مستدق ہے جبکہ $لہ = ۰$، لہ کو صفر کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے۔

تکملہ کی قیمت کیا ہوگی اگر ا یا ب یا ا اور ب دونوں منفی ہوں؟

مثال ۴ - $ع = \int_{0}^{\infty} \frac{جم ا لا \, ولا}{1 + لا^2}$ ، $و = \int_{0}^{\infty} \frac{لا \, جب ا لا}{1 + لا^2} \, ولا$

$$\frac{وع}{وا} = - \int_{0}^{\infty} \frac{لا \, جب ا لا \, ولا}{1 + لا^2} = -و \quad \ldots\ldots (1)$$

بشرطیکہ تکملہ و یکساں طور پر مستدق ہو اور ایسا ہوگا اگر $ا \geq ج > ۰$،

کیونکہ اگر لا ≦ ھ > ۱ تو جزو ضربی $\frac{\text{لا}}{\text{۱ + لا}^{۲}}$ ، لا کا گھٹنے والا تفاعل ہے اور اس لئے (ھ ≦ ضا ≦ ک)

$$\int_{\text{ھ}}^{\text{ک}} \frac{\text{لا جب ا لا}}{\text{۱ + لا}^{۲}}\,\text{و لا} = \frac{\text{ھ}}{\text{۱ + ھ}^{۲}} \cdot \frac{\text{جم ا ھ - جم ا ضا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ک}}{\text{۱ + ک}^{۲}} \cdot \frac{\text{جم ا ضا - جم ا ک}}{\text{ا}}$$

پس
$$\left| \int_{\text{ھ}}^{\infty} \frac{\text{لا جب ا لا}}{\text{۱ + لا}^{۲}} \right| \leqq \frac{\text{۲ ھ}}{\text{ج (۱ + ھ}^{۲})} > \frac{\text{۲}}{\text{ھ ج}}$$

لیکن $\frac{\text{۲}}{\text{ھ ج}}$ ، ا پر منحصر نہیں ہے اور ھ کے مناسب انتخاب سے اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

و کے تفرق کرنے سے جو تکملہ ملتا ہے وہ مستندق نہیں ہے لیکن اگر مثال ا (۲) میں ہم لیں ھا = ا ≦ ج > ۰ تو حاصل ہوگا

$$\text{و} - \frac{\pi}{\text{۲}} = \int^{\infty} \left(\frac{\text{لا}}{\text{۱ + لا}^{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right) \text{جب ا لا و لا} = -\int^{\infty} \frac{\text{جب ا لا و لا}}{\text{لا (۱ + لا}^{۲})}$$

اب ہم تفرق کر سکتے ہیں۔ پس

$$\frac{\text{و و}}{\text{و ا}} = -\int^{\infty} \frac{\text{جم ا لا و لا}}{\text{۱ + لا}^{۲}} = -\text{ع} \quad \text{.........(۲)}$$

(۱) اور (۲) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{و}^{۲}\text{ع}}{\text{و ا}^{۲}} = -\frac{\text{و و}}{\text{و ا}} = \text{ع}$$

ع میں اس تفرقی مساوات کا پورا تکملہ ہے

$$\text{ع} = \text{ا و}^{\text{ا}} + \text{ب و}^{-\text{ا}}$$

اب ا کی ہر قیمت کے لئے ع محدود ہے ($\frac{\pi}{\text{۲}}$ سے بڑا نہیں) اسلئے

ا = ۰ کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو ا کے صفر ہونے سے ع بائل بہ لاتناہی ہوگا۔ نیز ہر ا کے لئے ع مسلسل ہے جبکہ ہم ا کو صفر بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ع = $\frac{\pi}{۲}$، جس سے ب = $\frac{\pi}{۲}$ اس لئے

$$ع = \frac{\pi}{۲} ق^{-ا}،\quad ا \geq ۰،\quad و = -\frac{دع}{دا} = \frac{\pi}{۲} ق^{-ا}،\quad ا > ۰.$$

اگر ا < ۰ تو ع = $\frac{\pi}{۲} ق^{ا}$، و = $-\frac{\pi}{۲} ق^{ا}$۔ اگر ا = ۰ تو و = ۰۔

نتیجہ صریح

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{جم\, ا\, لا\, دلا}{ب^۲ + لا^۲} = \frac{\pi}{۲ب} ق^{-اب}،\quad ا \geq ۰،\quad ب > ۰.$$

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{لا\, جب\, ا\, لا\, دلا}{ب^۲ + لا^۲} = \frac{\pi}{۲} ق^{-اب}،\quad ا > ۰،\quad ب > ۰.$$

مثال ۵ ـ $\int_{۰}^{\infty} ق^{-ا^۲لا^۲} جم\, ۲ب\, لا\, دلا = \frac{\sqrt{\pi}}{۲ا} ق^{-\frac{ب^۲}{ا^۲}}$

تکملہ کو ع سے تعبیر کرو اور بلحاظ ب کے تفرق کرو، اس طرح

$$\frac{دع}{دب} = \int_{۰}^{\infty} -۲لا\, ق^{-ا^۲لا^۲} جب\, ۲ب\, لا\, دلا = \left[\frac{ق^{-ا^۲لا^۲}}{ا^۲} جب\, ۲ب\, لا\right]_{۰}^{\infty}$$

$$-\frac{۲ب}{ا^۲} \int_{۰}^{\infty} ق^{-ا^۲لا^۲} جم\, ۲ب\, لا\, دلا$$ تکمل بالحصص سے۔

تکمل شدہ حصہ دونوں حدود پر صفر ہوتا ہے۔ پس

$$\frac{دع}{دب} = -\frac{۲ب}{ا^۲} ع،\quad ع = ا\, ق^{-\frac{ب^۲}{ا^۲}}$$

لیکن جب ب = ۰، ع = $\int_{۰}^{\infty} ق^{-ا^۲لا^۲} دلا = \frac{1}{ا} \int_{۰}^{\infty} ق^{-ما^۲} دما = \frac{\sqrt{\pi}}{۲ا}$ (دفعہ ۲۷ مثال ۳)

اسلئے ا = $\frac{\sqrt{\pi}}{۲ا}$ اور ع = $\frac{\sqrt{\pi}}{۲ا} ق^{-\frac{ب^۲}{ا^۲}}$

مثال ۲- $\int_{0}^{\infty} \text{و}^{-\left(\text{ا}^2\text{لا}^2+\frac{\text{ب}^2}{\text{لا}^2}\right)} \text{ور لا} = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{۲ا}}\, \text{و}^{-\text{۲اب}}$، ا > ۰، ب > ۰.

اس تکملہ کی قیمت بلحاظ ب کے تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے لیکن متغیر کے بدلنے کا قاعدہ زیادہ علم آموز ہوگا، رکھو

$\text{ما} = \text{الا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$، جس سے $\text{لا} = \left\{\text{ما} \pm \sqrt{\text{ما}^2 - \text{۴اب}}\right\}/\text{۲ا} \ldots\ldots (۱)$

$$\frac{\text{ورما}}{\text{ورلا}} = \text{ا} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2},\quad \frac{\text{ورلا}}{\text{ورما}} = \frac{۱}{\text{۲ا}}\left\{۱ \pm \frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{ما}^2-\text{۴اب}}}\right\} \ldots\ldots\ldots (۲)$$

متغیر ما اقل ہے جبکہ $\text{لا} = \sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ا}}}$۔ جیسے لا بڑھتا ہے صفر سے $\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ا}}}$ تک، ما گھٹتا ہے ∞ سے $۲\sqrt{\text{اب}}$ تک، لا کی اس سعت کے لئے (۱) اور (۲) میں منفی علامت لینی چاہیئے۔ جیسے لا بڑھتا ہے $\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ا}}}$ سے ∞ تک، ما بڑھتا ہے $۲\sqrt{\text{اب}}$ سے ∞ تک لا کی اس سعت کے لئے (۱) اور (۲) میں مثبت علامت لینی چاہیے۔

نیز $\text{ا}^2\text{لا}^2 + \frac{\text{ب}^2}{\text{لا}^2} = \text{ما}^2 - \text{۲اب}$، پس تکملہ مساوی ہے

$$\frac{\text{و}^{\text{۲اب}}}{\text{۲ا}}\int_{\infty}^{۲\sqrt{\text{اب}}} \text{و}^{-\text{ما}^2}\left\{۱-\frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{ما}^2-\text{۴اب}}}\right\}\text{ورما} + \frac{\text{و}^{\text{۲اب}}}{\text{۲ا}}\int_{۲\sqrt{\text{اب}}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ما}^2}\left\{۱+\frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{ما}^2-\text{۴اب}}}\right\}\text{ورما}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{۲اب}}}{\text{۲ا}}\int_{۲\sqrt{\text{اب}}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ما}^2}\frac{\text{۲ما ورما}}{\sqrt{\text{ما}^2-\text{۴اب}}} = \frac{\text{و}^{-\text{۲اب}}}{\text{ا}}\int_{0}^{\infty}\text{و}^{-\text{ی}^2}\text{ور ی}$$

ابدال $\text{ی}^2 = \text{ما}^2 - \text{۴اب}$ کی مدد سے۔ موخر الذکر تکملہ کی مطلوبہ قیمت

فوراً حاصل ہوتی ہے۔ طالب علم ابدال $\text{و} = \text{ا}\,\text{لا} - \frac{\text{ب}}{\text{ا}\,\text{لا}}$ کی مدد سے قیمت محسوب کرے۔ جیسے لا بڑھتا ہے صفر سے ∞ تک، و بڑھتا ہے $-\infty$ سے ∞ تک۔

مثال ۷۔ $\text{ی} = \int_{\cdot}^{\infty} \text{قو}^{-\text{الا}}\, \text{لا}^{\text{ن}-1}\, \text{جم ب لا}\, \text{ء لا}$، $\text{ق} = \int_{\cdot}^{\infty} \text{قو}^{-\text{الا}}\, \text{لا}^{\text{ن}-1}\, \text{جب ب لا}\, \text{ء لا}$

جہاں $\text{ا} > \cdot$، $\text{ن} > \cdot$۔

ذیل کے ابدال عمل میں لاؤ۔

$\text{ا} = \text{ر جم طہ}$، $\text{ب} = \text{ر جب طہ}$ جہاں $-\frac{\pi}{2} < \text{طہ} < \frac{\pi}{2}$

$\text{ر لا} = \text{ما}$، $\text{ی ر}^{\text{ن}} = \text{ی}$، $\text{ق ر}^{\text{ن}} = \text{و}$ ....(۱)

اس طرح تکملے یہ شکل اختیار کرتے ہیں

$$\text{ی} = \int_{\cdot}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ما جم طہ}}\, \text{ما}^{\text{ن}-1}\, \text{جم (ما جب طہ) ء ما}،$$

$$\text{و} = \int_{\cdot}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ما جم طہ}}\, \text{ما}^{\text{ن}-1}\, \text{جب (ما جب طہ) ء ما}$$

اب ی کو بلحاظ طہ کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ء ی}}{\text{ء طہ}} = \int_{\cdot}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ما جم طہ}}\, \text{ما}^{\text{ن}}\, \text{جب طہ جم (ما جب طہ) ء ما}$$

$$- \int_{\cdot}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ما جم طہ}}\, \text{ما}^{\text{ن}}\, \text{جم طہ جب (ما جب طہ) ء ما}) \ldots\ldots\ldots (۲)$$

بشرطیکہ تکملے یکساں طور پر مستدق ہوں اور یہ ہیں کیونکہ اگر ج مثبت ہو خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو تو $\text{ا} \geq \text{جم طہ} \geq \text{ج}$ اور ان میں سے ہر ایک تکملہ تعداداً کم ہے ذیل کے تکملے سے

$$\int_{0}^{\infty} و^{-ج ما} \; ما^{ن} \; ر ما = \frac{جا(ن+۱)}{ج^{ن+۱}}$$

پس ہر ایک تکملہ یکساں طور پر مستمر ہے جبکہ $-\frac{\pi}{۲} < ط < \frac{\pi}{۲}$

ہم مساوات (۲) کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\frac{ر ع}{ر ط} = \int_{0}^{\infty} ما^{ن} \frac{ر}{ر ما} \{ و^{-ما جم ط} جب (ما جب ط) \} ر ما$$

اور تکمل بالحصص سے

$$\frac{ر ع}{ر ط} = -ن \int_{0}^{\infty} و^{-ما جم ط} ما^{ن-۱} جب (ما جب ط) ر ما = -ن و \quad (۳)$$

اسی طرح سے $\frac{ر و}{ر ط} = ن ع$ .... (۴)

(۳) اور (۴) سے $\frac{ر^{۲} ع}{ر ط^{۲}} + ن^{۲} ع = ۰$، ع = ا جم ن ط + ب جب ن ط

جب ط = ۰، تو ع = $\int_{0}^{\infty} و^{-ما} ما^{ن-۱} ر ما = جا (ن)$، $\frac{ر ع}{ر ط} = ۰$

پس ا = جا (ن)، ب = ۰

اور اس لئے ع = جا (ن) جم ن ط، و = $-\frac{۱}{ن} \frac{ر ع}{ر ط}$ = جا (ن) جب ن ط .... (۵)

اس لئے ہمیں ذیل کے نتائج حاصل ہوتے ہیں

$$\int_{0}^{\infty} و^{-لا} لا^{ن-۱} جم ب لا \; ر لا = \frac{جا (ن) جم ن ط}{ر^{ن}} \quad .... (۶)$$

$$\int_{0}^{\infty} \text{ق}^{-\text{الا}}\, \text{لا}^{\text{ن}-1}\, \text{جب ب لا ءلا} = \frac{\text{جا(ن) جب ن طہ}}{\text{ر}^{\text{ن}}} \quad \ldots\ldots (7)$$

جہاں $\text{طہ} = \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)$، $\text{ر} = (\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{\frac{1}{2}}$

(۶) اور (۷) میں مستقلات کو خاص قیمتیں دینے سے کئی ضروری نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

جب $\text{ا} = 0$، $\text{ب} > 0$ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے اگر $0 < 1-\text{ن} < 1$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جم ب لا ءلا}}{\text{لا}^{1-\text{ن}}} = \frac{\text{جا(ن) جم}\frac{\text{ن}\pi}{2}}{\text{ب}^{\text{ن}}} ،\quad \int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب ب لا ءلا}}{\text{لا}^{1-\text{ن}}} = \frac{\text{جا(ن) جب}\frac{\text{ن}\pi}{2}}{\text{ب}^{\text{ن}}} \quad \ldots\ldots (8)$$

دوسری مساوات درست رہتی ہے اگر $0 < 1-\text{ن} < 2$

ان تکملوں میں رکھو $\text{ب} = 1$، $\text{ن} = \frac{1}{2}$ تب چونکہ $\text{جا}(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$، اسلئے

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جم لا}}{\sqrt{\text{لا}}}\,\text{ءلا} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب لا}}{\sqrt{\text{لا}}}\,\text{ءلا} \quad \ldots\ldots (9)$$

اور لا کی بجائے لا^2 مندرج کرنے سے

$$\int_{0}^{\infty} \text{جم}(\text{لا}^2)\,\text{ءلا} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{0}^{\infty} \text{جب}(\text{لا}^2)\,\text{ءلا} \quad \ldots\ldots (10)$$

نیز (۶) اور (۷) میں رکھو $\text{ن} = \frac{1}{2}$ اور لا کی بجائے لا^2 رکھو تب

$$\int_{0}^{\infty} \text{ق}^{-\text{الا}^2}\, \text{جم}(\text{ب لا}^2)\,\text{ءلا} = \frac{\sqrt{\pi}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2}}{2\,\text{ر}^{\frac{1}{2}}} ،\quad \int_{0}^{\infty} \text{ق}^{-\text{الا}^2}\, \text{جب}(\text{ب لا}^2)\,\text{ءلا} = \frac{\sqrt{\pi}\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{2}}{2\,\text{ر}^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (11)$$

جہاں طہ اور ر کی قیمتیں وہی ہیں، جو پہلے تھیں۔

۴۷۔ لاانتہا حدود کے لئے تکمل کی ترتیب

مسئلہ ا دفعہ ۲۷ سے ظاہر ہے کہ بعض حالات کے ماتحت تکمل کی ترتیب اُس صورت میں بھی بدل سکتی ہے جبکہ ایک حد لاامتناہی ہو۔ دفعہ ۱۷ کے مسئلہ ۳ سے اُن شرائط کی تعیین ہوتی ہے جن کے ماتحت دفعہ ۲۷ کے مسئلہ ا کو توسیع دیکر ہم اُس صورت پر بھی حاوی کر سکتے ہیں جس میں اوپر کی حد ما بھی لاامتناہی ہو۔

مسئلہ ا۔ اگر تکملے

$$\int_{ا}^{\infty} ف(لا، ما)\, ولا \;......(۱)،\qquad \int_{ر}^{د} ف(لا، ما)\, وما \;......(۲)$$

بالترتیب یکساں طور پر مستدق ہوں بالتمام اختیاری وقفوں (اَ، بَ) اور (رَ، ب) میں

اور اگر تکملہ

$$\int_{ا}^{\infty} ولا \int_{ر}^{ما} ف(لا، ما)\, وما \;..........(۳)$$

یکساں طور پر مستدق ہو پورے نامحدود وقفہ ما ≥ رَ میں تو

$$\int_{ر}^{\infty} وما \int_{ا}^{\infty} ف(لا، ما)\, ولا = \int_{ا}^{\infty} ولا \int_{ر}^{\infty} ف(لا، ما)\, وما \;......(۴)$$

فرض کرو کہ دفعہ ۱۷ مسئلہ ۳ کے تفاعل ف(لا، ما) کی تعیین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے

$$ف(لا، ما) = \int_{ر}^{ما} ف(لا، ما)\, وما$$

اس صورت میں اوپر کا تکملہ (۳) مسئلہ مذکورہ کا تفاعل سا(ما) ہوگا۔ اوپر کے تکملہ (۲) کا استدقاق مسئلہ مذکورہ کی شرط (۲) کو پورا کرتا ہے اور تکملہ (۳) کا استدقاق شرط (۱) کو اور اوپر کے تکملہ (۱) کے استدقاق کی وجہ سے ہم دفعہ ۲۷ کے مسئلہ ا کو لگا سکتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\int_{ر}^{\infty} وما \int_{ا}^{\infty} ف(لا، ما)\, ولا = \lim_{ما \to \infty} \int_{ر}^{ما} \int_{ا}^{\infty} ف(لا، ما)\, ولا$$

$$= \text{نہا}_{\text{ما}\to\infty} \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{فا(لا، ما) ورما}$$ (مسئلہ ۱، دفعہ ۲۷)

$$= \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) ورما}$$ (مسئلہ ۳، دفعہ ۱۷)

طالب علم شاید یہ خیال کریگا کہ موخرالذکر تکملہ اس سے پہلے تکملہ کو لکھنے کا صرف ایک اور طریقہ ہے، لیکن یہ ایسا نہیں ہے۔ آخیر سے دوسرے تکملہ میں اعمال کی ترتیب یہ ہے (۱) تکمل بلحاظ ما کے (۲) تکمل بلحاظ لا کے اور انتہا لا ← ∞ کی طرف گذر (۳) انتہا ما ← ∞ کی طرف گذر۔ آخری تکملہ میں ترتیب یہ ہے (۱) تکمل بلحاظ ما کے (۲) انتہا ما ← ∞ کی طرف گذر (۳) تکمل بلحاظ لا کے اور انتہا لا ← ∞ کی طرف گذر۔ ترتیب الٹانے کے لئے اس کا جواز ثابت کرنے کی ضرورت ہوگی جیسے ذیل کی سادہ مثال سے ظاہر ہے۔ اگر ا > ۰ تو

$$\text{نہا}_{\text{ما}\to\infty} \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{جم(لاما) ورما} = \text{نہا}_{\text{ما}\to\infty} \int_{\text{ر}}^{\infty} \frac{\text{جب(لاما)}}{\text{لا}} \text{ورلا}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ما}\to\infty} \int_{\text{ر ما}}^{\infty} \frac{\text{جب ع}}{\text{ع}} \text{ورع} = ۰$$

لیکن $\int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{جم(لاما) ورما}$ ایک معین مقدار نہیں ہے۔

ہم صورت حال کو اس طور پر بھی بیان کر سکتے ہیں

$$\text{نہا}_{\text{ما}\to\infty} \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{ر}}^{\text{ما}} \text{فا(لا، ما) ورما} = \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) ورما}$$

$$\neq \text{نہا}_{\text{ما}\to\infty} \int_{\text{ر}}^{\infty} \text{ورلا} \int_{\text{ما}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) ورما} \quad ......(۵)$$

ہمیں ثابت کرنا چاہیئے کہ آخری تکملہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جیسے ما لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے، اوپر کے مسئلہ کے لئے ثبوت دفعہ ۱

مسئلہ ۳ کے اندر شامل ملیگا۔

یکسان استدقاق بالعموم ایسا ممکن ہے کہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہو بالتمام وقفوں (ا، ج - عا)، (ج + عاً، ب) میں جہاں ا ≦ ج ≦ ب اور عا، عاً اختیاری چھوٹی مثبت مقداریں ہیں یعنی استدقاق ج کے پاس یکساں نہیں رہتا۔ اگر ج جیسی قیمتیں تعداد میں محدود ہوں تو اسے ہم یوں بیان کرینگے کہ تکملہ تمام وقفہ (ا، ب) میں عام طور پر یکساں استدقاق رکھتا ہے۔ اگر ج = ا تو ہم لے سکتے ہیں عا = ۰ اور اگر ج = ب تو عاً = ۰ لیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ ۲ - اگر تکملہ (۱) محض عام طور پر یکساں استدقاق رکھتا ہو لیکن تکملہ (۳) مسلسل تفاعل ہو ما کا سمت ا ≦ ما ≦ ب کے لئے تو

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{دما} \int_{\text{د}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) دلا} = \int_{\text{د}}^{\infty} \text{دلا} \int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{فا(لا، ما) دما} \quad \dots (۶)$$

جہاں اوپر کی حد ما کوئی عدد ہے وقفہ (ا، ب) کے درمیان۔

مسئلہ ا دفعہ ۲۷ کی یہ توسیع ہے، فرض کرو کہ صرف ایک نقطہ ج ایسا ہے اور ا < ج < ما، اگر ایک سے زیادہ ایسے نقطے ہوں تو اسی استدلال کو مکرر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ تکملہ (۱) کو ف (ما) سے تعبیر کرو تب (مقابلہ کرو دفعہ ۶۵ کے ساتھ)

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ما}} \text{ف(ما) دما} = \text{نہا}_{\text{عا}\to 0} \int_{\text{ا}}^{\text{ج-عا}} \text{ف(ما) دما} + \text{نہا}_{\text{عاً}\to 0} \int_{\text{ج+عاً}}^{\text{ما}} \text{ف(ما) دما} \quad \text{(تعریف کی رو سے)}$$

$$= \text{نہا}_{\text{عا}\to 0} \int_{\text{د}}^{\infty} \text{دلا} \int_{\text{ا}}^{\text{ج-عا}} \text{فا(لا، ما) دما} + \text{نہا}_{\text{عاً}\to 0} \int_{\text{د}}^{\infty} \text{دلا} \int_{\text{ج+عاً}}^{\text{ما}} \text{فا(لا، ما) دما}$$

[مسئلہ ا دفعہ ۲۷ کی رو سے]

$$\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ور لا} \int_{\text{ج}}^{\text{ما}} \text{فا(لا، ما) فرما} + \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ور لا} \int_{\text{ا}}^{\text{ج}} \text{فا(لا، ما) ورما} =$$

کیونکہ تکملہ (۳) مسلسل ہے اور ہم ج۱ = ج۱ . بنا سکتے ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے کیونکہ ان تکملوں کا مجموعہ (۶) کے بائیں جانب کے تکملہ کے مساوی ہے۔

یہ یاد رہے کہ (۳) مسلسل ہوگا اگر یہ وقفہ (ا، ب) میں یکساں طور پر مستدق ہو۔

مسئلہ ۳۔ مساوات (۴) اس صورت میں بھی درست رہتی ہے جبکہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہو بالعموم بشرطیکہ مسئلہ (۱) کے اور شرائط پورے ہوں۔ یہ مسئلہ مسئلہ بالا کا سیدھا نتیجہ صریح ہے۔

مسئلہ ۴۔ اگر تکملے (۱) اور (۲) یکساں طور پر مستدق ہوں محض عام طور پر سراسر وقفوں (ا، ب)، (ا، ب) میں بالترتیب، لیکن اگر تکملہ (۳) اور متناظر تکملہ

$$\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فرما} \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{فا(لا، ما) فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\bar{۳})$$

یکساں طور پر مستدق ہوں سراسر نامحدود وقفوں ما $\geq$ ا اور لا $\geq$ ا میں بالترتیب تو مساوات (۴) درست رہتی ہے بشرطیکہ (۴) میں کا ایک تکملہ قابل تعین ہو۔

فرض کرو کہ (۴) کے بائیں جانب کا تکملہ $\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فرلا} \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) فرما}$ قابل تعین ہے اور اس کو ا سے تعبیر کرو۔ تب (مقابلہ کرو دفعہ ۴۶ کے ساتھ)

$$\text{نہا}_{\text{ب} \to \infty} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فرلا} \int_{\text{ا}}^{\infty} \text{فا(لا، ما) فرما} = \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

چونکہ تکملہ (۳) مسلسل ہے، اسلئے مسئلہ (۲) کی رو سے

$$\int_{ر}^{ما}\text{فرما}\int_{ر}^{\infty}\text{فا(لا، ما) فرلا} = \int_{ر}^{\infty}\text{فرلا}\int_{ر}^{ما}\text{فا(لا، ما) فرما} = \text{ا} - \int_{ر}^{\infty}\text{فرلا}\int_{ما}^{\infty}\text{فا(لا، ما) فرما}$$

موخرالذکر تکملہ کو حب (ما) سے تعبیر کرو۔ ہمیں ثابت کرنا چاہئے (مقابلہ کرو مساوات (۵) کے ساتھ اور اس کے متعلق جو عبارت ہے) کہ

نہا حب (ما) = ۰ جبکہ ما ← ∞ ۔

اب حب (ما) یکساں طور پر مستدق ہے جبکہ ما ≥ ر کیونکہ

$$\int_{ب}^{\infty}\text{فرلا}\int_{ما}^{\infty}\text{فا(لا، ما) فرما} = \int_{ب}^{\infty}\text{فرلا}\int_{ر}^{\infty}\text{فا(لا، ما) فرما} - \int_{ب}^{\infty}\text{فرلا}\int_{ر}^{ما}\text{فا(لا، ما) فرما}$$

= عہ - یہ (مانو)

(۷) کی رو سے ہم مہ کا اس طور پر انتخاب کر سکتے ہیں کہ |عہ| > صہ اگر ب > مہ اور چونکہ تکملہ (۳) یکساں طور پر مستدق ہے ما ≥ ر کے لئے ہم مہَ کا انتخاب اس طور پر کر سکتے ہیں کہ |یہ| > صہ ہر ایسے ما ≥ ر کے لئے اگر ب > مہَ۔
فرض کرو کہ مہ ہر دو اعداد مہ، مہَ سے بڑا ہے، تب |عہ - یہ| > ۲ صہ ہر ایسے ما ≥ ر کے لئے اگر ب > مہ، اسلئے حب (ما) مستدق ہے جیسے بیان ہوا۔

$$\text{اور حب (ما)} = \int_{ر}^{ب}\text{فرلا}\int_{ما}^{\infty}\text{فا(لا، ما) فرما} + \int_{ب}^{\infty}\text{فرلا}\int_{ما}^{\infty}\text{فا(لا، ما) فرما}$$

$$= \int_{ما}^{\infty}\text{فرما}\int_{ر}^{ب}\text{فا(لا، ما) فرلا} + \int_{ب}^{\infty}\text{فرلا}\int_{ما}^{\infty}\text{فا(لا، ما) فرما}$$

مسئلہ (۲) کی رو سے کیونکہ (۳) مسلسل ہے۔

= جہ + (عہ - یہ)، مانو

اب فرض کرو کہ ب ایک ثابت عدد ہے جو بڑا ہے مہ سے (جیسے اوپر معلوم کیا گیا)، تب |عہ - یہ| > ۲ صہ، نیز چونکہ تکملہ (۳) یکساں طور پر مستدق ہے لا ≥ ر کے لئے ہم ن کا اس طور پر انتخاب کر سکتے ہیں کہ

اجبا | < صہ اگر ما > ن، اسلئے | ج ب (ما) | < ۳ صہ اگر ما > ن، دوسرے الفاظ میں نہا ج ب (ما) = ۰ جبکہ ما ← ∞ پس مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر فا (لا، ما) ہمیشہ مثبت ہو تو تکملوں (۳)، (۳َ) کا استدقاق اس امر سے حاصل ہو سکتا ہے کہ (۴) کا ایک تکملہ قابل تعیّن ہے۔ طالب علم کے لئے اچھی مشق ہوگی کہ وہ اس بیان کی صداقت قائم کرے۔ اس لئے اگر فا (لا، ما) مثبت ہو تو مسئلہ (۴) بہت مختصر ہو جاتا ہے کیونکہ تکملوں (۳) اور (۳َ) سے قطع نظر کی جا سکتی ہے۔

نوٹ۔ دفعات ۲۷، ۳۷ کے مختلف مسائل کے جواز کے لئے جو شرائط بیان کئے گئے ہیں وہ محض کافی ہیں ضروری نہیں۔ یہ بھی ہمیشہ یاد رکھنا چاہئے کہ تفاعیل زیر بحث مسلسل فرض کئے گئے ہیں۔

۴۷۔ دیگر غیر واجب تکملے۔ جب متکمل غیر مسلسل تفاعل ہو تو متغیر کی تبدیلی یا تکمل بالحصص سے بعض اوقات یہ عدم تسلسل دور ہو سکیگا اور اوپر کے مسائل لگ سکینگے۔

مثلاً اگر ۰ < ن < ۱ تو دونوں قو^لا^ لا^ن-۱^ اور قو^لا^ لا^ن-۱^ لوک لا

غیر مسلسل ہیں جبکہ لا = ۰ اور $\frac{\text{و جا (ن)}}{\text{و ن}}$ معلوم کرنے کے لئے ہم

مسئلہ ۲ دفعہ ۲۷ سیدھا نہیں لگا سکتے۔ لیکن تکمل بالحصص سے جا (ن) = $\frac{\text{جا (ن+۱)}}{\text{ن}}$

اور $\frac{\text{و جا (ن)}}{\text{و ن}} = -\frac{\text{جا (ن+۱)}}{\text{ن}^2} + \frac{1}{\text{ن}} \int_0^\infty$ قو^لا^ لا^ن^ لوک لا و لا = $\int_0^\infty$ قو^لا^ لا^ن-۱^ لوک لا و لا

اور یہی تکملہ مسئلہ ۲ دفعہ ۲۷ کو سیدھا لگانے سے حاصل ہوگا (نیز ملاحظہ ہو مثال ۵ نیچے)

دفعہ ۶۹ کے مسئلوں کو ذیل کی تعریف کے زیر عمل

محدود حدود والے تکملہ کی صورت میں بھی توسیع دی جا سکتی ہے جس میں شکل ایک حد پر لامتناہی ہو جائے۔

تعریف۔ اگر فا (لا، ما) مسلسل ہو سراسر وقفوں

ا < لا ≥ ب، اَ ≥ ما ≥ ب

میں لیکن لامتناہی ہو جائے لا = ا، ما = ما کے لئے تو تکملہ

ف (ما) = $\int_{ا}^{ب}$ فا (لا، ما) فرلا .... (۱)

یکساں طور پر مستدق کہلاتا ہے سراسر وقفہ اَ ≥ ما ≥ بَ میں اگر ایک عدد لہ ایسا موجود ہو جو ما پر منحصر نہ ہو اور جبکہ ا < لا < ا + لہ تو

| $\int_{ا}^{لا}$ فا (لا، ما) فرلا | < صہ .... (۲)

اگر فا (لا، ما) لامتناہی ہو جبکہ لا = ب، ما = ما تو (۲) کے جواب میں تکملہ کے حدود لا اور ب ہونگے ایسے کہ ب - لہ < لا < ب

طالب علم باسانی ثابت کر سکیگا کہ مسئلہ ۱ دفعہ ۷، اور مسائل ۱، ۲ دفعہ ۷۲ (مناسب ترمیموں کے ساتھ) غیر واجب تکملہ (۱) کی صورت میں بھی جاری ہیں ہم ذیل کی چند مثالوں کے ساتھ ختم کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ ا = $\int_{0}^{\infty}$ قو$^{-ع^۲}$ فرع = $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$

متغیر ع کو لا میں ابدال ع = لا ما کے ذریعہ تبدیل کرو، تب

ا = $\int_{0}^{\infty}$ قو$^{-لا^۲ ما^۲}$ ما فرلا

قو$^{-ما^۲}$ سے ضرب دو اور ما = ۰ سے ما = ∞ تک تکمل کرو، اس طرح

ا^۲ = ا $\int_{0}^{\infty}$ قو$^{-ما^۲}$ فرما = $\int_{0}^{\infty}$ فرما $\int_{0}^{\infty}$ قو$^{-(۱+لا^۲) ما^۲}$ ما فرلا

تکمل کی ترتیب بدلنے سے

$$\text{ا}^{۲} = \int_{۰}^{\infty} \text{دلا} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-(۱+\text{لا}^{۲})\text{ما}^{۲}}\, \text{ما}\, \text{دما} = \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{دلا}}{۲(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\text{پس}\quad \text{ا} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

یہ دیکھنے کے لئے کہ ہم تکمل کی ترتیب بدل سکتے ہیں، فرض کرو کہ

$$\text{ما}\, \text{قو}^{-(۱+\text{لا}^{۲})\text{ما}^{۲}} = \text{فا}(\text{لا}،\ \text{ما})$$

اب $\int_{\text{ن}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\, \text{دلا} = \text{قو}^{-\text{ما}^{۲}} \int_{\text{ن}}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲}}\, \text{ما}\, \text{دلا} = \text{قو}^{-\text{ما}^{۲}} \int_{\text{ن ما}}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ی}^{۲}}\, \text{دی}$

اگر $\text{ما} \geq \text{ر} > ۰$ تو [چونکہ $\int^{\infty} \text{قو}^{-\text{ی}^{۲}}\, \text{دی}$ مستدق ہے] ہم صریحاً م دریافت کر سکتے ہیں جو ما پر منحصر نہ ہو اور جبکہ ن > م تو

$$\left| \int_{\text{ن}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\ \text{ما})\, \text{دلا} \right| < \text{حصہ}$$

اسلئے $\int_{۰}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\ \text{ما})\, \text{دلا}$ یکساں طور پر مستدق ہے سعت $\text{ما} \geq \text{ر} > ۰$ کے لئے۔ یہ یکساں طور پر مستدق ہے بالعموم سعت $\text{ما} \geq ۰$ کے لئے اور زیادہ قوی وجوہات کی بناء پر اختیاری وقفہ (۰، ب) کے لئے۔ دفعہ ۱۳، مسئلہ ۳ کے اطلاق کے متعلق اور شرائط صریحاً پورے ہوتے ہیں، تکمل کی ترتیب کا بدلنا اس لئے جائز ہے۔

مثال ۲ — اگر ا > ۰، ج > ۰، ن ≥ ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم}\,۲\,\text{ج لا}\,\text{ڈلا}}{(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\text{ن}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{جا}(\text{ن})} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-(\text{ا}^2\text{لا}^2 + \frac{\text{ج}^2}{\text{لا}^2})}\, \text{لا}^{۲\text{ن}-۲}\, \text{ڈلا}$$

$$\frac{\text{جا}(\text{ن})}{(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\text{ن}}} = \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-(\text{ا}^2+\text{لا}^2)\text{ما}}\, \text{ما}^{\text{ن}-۱}\, \text{ڈما}$$ (مثال ۱۷، شق ۹)

جم ۲ ج لا کے ساتھ ضرب دو اور لا = ۰ سے لا = ∞ تک تکمل کرو اور مکرر تکملہ میں تکمل کی ترتیب بدلو۔ اس طرح

$$\text{جا}(\text{ن}) \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{جم}\,۲\,\text{ج لا}\,\text{ڈلا}}{(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\text{ن}}} = \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ا}^2\text{ما}}\, \text{ما}^{\text{ن}-۱}\, \text{ڈما} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^2\text{ما}}\, \text{جم}\,۲\,\text{ج لا}\,\text{ڈلا}$$

$$= \sqrt{\pi} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-(\text{ا}^2\text{ما} + \frac{\text{ج}^2}{\text{ما}})}\, \text{ما}^{\text{ن}-۱}\, \frac{\text{ڈما}}{۲\sqrt{\text{ما}}}$$ [مثال ۵، دفعہ ۲۷]

$$= \sqrt{\pi} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-(\text{ا}^2\text{لا}^2 + \frac{\text{ج}^2}{\text{لا}^2})}\, \text{لا}^{۲\text{ن}-۲}\, \text{ڈلا}$$ ، ابدال $\text{ما} = \text{لا}^2$

کی مدد سے۔

ابھی ہمیں یہ دیکھنا ہے کہ تکمل کی ترتیب کا بدلنا جائز ہے۔ متکمل کو فا(لا، ما) سے تعبیر کرو۔

$$\left|\int_{\text{ح}}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\, \text{ڈلا}\right| = \text{ما}^{\text{ن}-۱}\, \text{قو}^{-\text{ا}^2\text{ما}} \left|\int_{\text{ح}}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^2\text{ما}}\, \text{جم}\,۲\,\text{ج لا}\,\text{ڈلا}\right| < \text{ما}^{\text{ن}-۱}\, \text{قو}^{-\text{ا}^2\text{ما}} \int_{\text{ح}}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^2\text{ما}}\, \text{ڈلا}$$

اگر $\text{ا} > ۰$، تو تکملہ $\int_{\text{ح}}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^2\text{ا}}\, \text{ڈلا}$ چھوٹا ہے ہر ایسے $\text{ما} \geq \text{ا}$ کے لئے جبکہ ح بڑا ہو۔ نیز $\text{ما}^{\text{ن}-۱}\, \text{قو}^{-\text{ا}^2\text{ما}}$ محدود ہے ہر $\text{ما} \geq \text{ا}$ کے لئے۔ اسلئے $\int_{۰}^{\infty} \text{فا}(\text{لا}،\text{ما})\, \text{ڈلا}$ یکساں طور پر مستدق ہے عام طور پر اختیاری وقفہ (۰، ب) کے اندر۔ اور یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ دفعہ ۲۷

مسئلہ ۳ کے باقی شرائط پورے ہوتے ہیں، اس لئے تکمل کی ترتیب کا بدلنا جائز ہے۔

مثال ۳۔ اگر $ا > ۰$، $ج > ۰$، $ن \geq ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جا}(\text{ن}) \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-(\text{ا}^{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ج}^{۲}}{\text{لا}^{۲}})} \text{لا}^{\text{ن}-۲} \,\text{ولا} = \sqrt{\pi}\, \text{قو}^{-۲\text{اج}} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-۲\text{الا}} (۲\text{ج}+\text{لا})^{\text{ن}-۱} \text{لا}^{\text{ن}-۱} \,\text{ولا}$$

لا کی بجائے $\frac{۱}{\text{لا}}$ رکھنے سے دائیں جانب کا رکن ہو جاتا ہے

$$\text{جا}(\text{ن}) \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-(\text{ج}^{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}})} \frac{\text{ولا}}{\text{لا}^{۲\text{ن}}}$$

اور مثال (۱) کی طرح $\frac{\text{جا}(\text{ن})}{\text{لا}^{۲\text{ن}}}$ کے لئے ایک تکملہ رکھنے سے یہ ہو جاتا ہے

$$\int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-(\text{ج}^{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}})} \,\text{ولا} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}\text{ما}} \text{ما}^{\text{ن}-۱} \,\text{وما}$$

$$= \int_{۰}^{\infty} \text{ما}^{\text{ن}-۱} \,\text{وما} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-[(\text{ج}^{۲}+\text{ما})\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}}]} \,\text{ولا}$$

$$= \sqrt{\pi} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-۲\text{ا}\sqrt{\text{ج}^{۲}+\text{ما}}} \,\text{ما}^{\text{ن}-۱} \frac{\text{وما}}{۲\sqrt{\text{ج}^{۲}+\text{ما}}} \quad [\text{مثال ۶، دفعہ ۶۲}]$$

$$= \sqrt{\pi}\, \text{قو}^{-۲\text{اج}} \int_{۰}^{\infty} \text{قو}^{-۲\text{الا}} (۲\text{ج}+\text{لا})^{\text{ن}-۱} \text{لا}^{\text{ن}-۱} \,\text{ولا}،$$

ابدال $\sqrt{\text{ج}^{۲}+\text{ما}} = \text{ج}+\text{لا}$ کی مدد سے

تکمل کی ترتیب بدلنے کے جواز پر ہم بحث نہیں کرتے لیکن اس کا ثبوت دفعہ ۶۳ مسئلہ ۴ نتیجہ صریح کے ذریعہ بآسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

یہ مثال، مثال ۲ سے ملا کر ایک دلچسپ نتیجہ پیدا کرتی ہے۔

مثال ۴۔ اگر $\text{ع} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}}$ اور $۰ < \text{ن} < ۱$ تو $\frac{\text{فرع}}{\text{فرن}}$ معلوم کرو۔

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرن}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\text{لوک}(\text{جب لا})}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}}\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

بشرطیکہ تکملہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

اب رکھو $\text{ما} = \text{جب لا}$، تو حاصل ہوگا

$$\int_{0}^{\text{لا}} \frac{-\text{لوک}(\text{جب لا})}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{لا}}\,\text{فرلا} = \int_{0}^{\text{جب لا}} \frac{-\text{لوک ما}}{\text{ما}^{\text{ن}}} \times \frac{\text{فرما}}{\sqrt{۱-\text{ما}^{۲}}}$$

$$< \frac{۱}{\text{جم لا}} \int_{0}^{\text{جب لا}} \frac{-\text{لوک ما}}{\text{ما}^{\text{ن}}}\,\text{فرما}$$

$$< \frac{۱}{\text{جم لا}} \left\{ \frac{\text{جب}^{۱-\text{ن}}\,\text{لا}}{(۱-\text{ن})^{۲}} - \frac{\text{جب}^{۱-\text{ن}}\,\text{لا}\ \text{لوک}(\text{جب لا})}{۱-\text{ن}} \right\}$$

چونکہ $\text{جب}^{۱-\text{ن}}\,\text{لا}\ \text{لوک}(\text{جب لا})$، لا کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اس لئے صریحاً دفعہ ۴، کی تعریف کے شرائط پورے ہوتے ہیں اس لئے (۱) کا تکملہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے اور مساوات (۱) سے $\frac{\text{فرع}}{\text{فرن}}$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ $\text{جا}(\text{ن}) = \int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{فرلا}$ کے مشتق معلوم کرو۔

اگر $\text{ن} > ۱$ تو دفعہ ۲، مسئلہ ۲ لگ سکتا ہے کیونکہ $\text{لا}^{\text{ن}-۱}(\text{لوک لا})^{\text{م}}$ صفر کی طرف استدقاق کرتا ہے لا کے ساتھ اگر ن - ۱ اور م مثبت ہوں (مثال ۱۰، مشق ۷، حصہ اول)، اس انتہا کو ہم تفاعل کی قیمت مانتے ہیں جبکہ $\text{لا} = ۰$، اگر $\text{ن} \leq ۱$ تو لکھو

$$\text{جا}(\text{ن}) = \int_{0}^{۱} \text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{فرلا} + \int_{۱}^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{فرلا} = \text{ع} + \text{و} \quad (\text{لکھو})$$

ع کے مشتق معلوم کرو جیسے مثال ۴ میں، و کے مشتق اب بھی دفعہ ۲۷ مسئلہ ۲ کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ اس طرح مجموعات $\frac{\text{فع}}{\text{فن}} + \frac{\text{فو}}{\text{فن}}$، وغیرہ کو ایک تکملہ میں ملانے سے

$$\frac{\text{ف}\,\text{جا}(\text{ن})}{\text{ف}\,\text{ن}} = \int_0^\infty \text{و}^{-\text{لا}}\, \text{لا}^{\text{ن}-۱}\, \text{لوک}\, \text{لا}\; \text{ف}\,\text{لا}$$

$$\frac{\text{ف}^۲\,\text{جا}(\text{ن})}{\text{ف}\,\text{ن}^۲} = \int_0^\infty \text{و}^{-\text{لا}}\, \text{لا}^{\text{ن}-۱} (\text{لوک}\, \text{لا})^۲\; \text{ف}\,\text{لا}\text{، وغیرہ۔}$$

مشق ۱۹

ذیل کی معادلات ۱ تا ۲۰ کو قائم کرو

۱۔ $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \text{لوک}\,(\text{ا}^۲\, \text{جم}^۲ \text{لا} + \text{ب}^۲\, \text{جب}^۲ \text{لا})\; \text{ف}\,\text{لا} = \pi\, \text{لوک}\, \frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\text{،}\; \text{ا}\text{،}\, \text{ب} > ۰\text{۔}$

۲۔ $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{لوک}\,(۱ + \text{جم}\, \text{عہ}\, \text{جم}\, \text{لا})}{\text{جم}\, \text{لا}}\; \text{ف}\,\text{لا} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi^۲}{۴} - \text{عہ}^۲\right)\text{،}\; \text{جبکہ}\; \text{عہ} < \pi$

۳۔ $\int_0^{\frac{\pi}{۲}} \text{لوک}\left(\frac{\text{ا} + \text{ب}\, \text{جب}\, \text{لا}}{\text{ا} - \text{ب}\, \text{جب}\, \text{لا}}\right) \frac{\text{ف}\,\text{لا}}{\text{جب}\, \text{لا}} = \pi\, \text{جب}^{-۱}\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)\text{،}\; \text{ا} > \text{ب} > ۰\text{۔}$

۴۔ $\int_0^{۱} \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - ۱}{\text{لوک}\, \text{لا}}\; \text{ف}\,\text{لا} = \text{لوک}\,(\text{ن} + ۱)\text{،}\quad \text{ن} > ۰\text{۔}$

۵۔ $\int_0^{\infty} \frac{\text{مس}^{-۱}(\text{ا}\,\text{لا})\; \text{ف}\,\text{لا}}{\text{لا}\,(۱ + \text{لا}^۲)} = \frac{\pi}{۲}\, \text{لوک}\,(۱ + \text{ا})$

۶۔ $\int_0^{۱} \frac{\text{مس}^{-۱}(\text{ا}\,\text{لا})\; \text{ف}\,\text{لا}}{\text{لا}\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}} = \frac{\pi}{۲}\, \text{لوک}\,(\text{ا} + \sqrt{۱ + \text{ا}^۲})$

۷۔ $\int_0^{\infty} \text{لا}\, \text{و}^{-\text{ا}\,\text{لا}}\, \text{جم}\, \text{ب}\,\text{لا}\; \text{ف}\,\text{لا} = \frac{\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)^۲}\text{،}\; \text{ا} > ۰\text{۔}$

۸۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{لوک لا و لا}}{1+\text{لا}^2} = \frac{\pi^2}{4}\,\text{قط}\,\frac{\text{ن}\pi}{2}\,\text{مس}\,\frac{\text{ن}\pi}{2}،\ 1>\text{ن}>0$

۹۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{و}^{\text{ن لا}}+\text{و}^{-\text{ن لا}}}{\text{و}^{\text{لا}}-\text{و}^{-\text{لا}}}\,\text{لا و لا} = \frac{\pi^2}{4}\,\text{قط}^2\,\frac{\text{ن}\pi}{2}،\ -1<\text{ن}<1$

۱۰۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جم ا لا}-\text{جم ب لا}}{\text{لا}^2}\,\text{و لا} = \frac{\pi}{2}(\text{ب}-\text{ا})،\ \text{ا}>0،\ \text{ب}>0$

۱۱۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لوک}(1+\text{ا}^2\text{لا}^2)}{1+\text{لا}^2}\,\text{و لا} = \pi\,\text{لوک}\,(\text{ا}+1)،\ \text{ا}\geq 0$

۱۲۔ $\int_{0}^{\pi} \frac{\text{لوک}(1+\text{ا جب}^2\text{لا})}{\text{جب}^2\,\text{لا}}\,\text{و لا} = 2\pi\left\{\sqrt{1+\text{ا}}-1\right\}،\ \text{ا}>-1$

۱۳۔ $\int_{0}^{\infty} \text{لا}^{2\text{ن}}\,\text{و}^{-\text{ل لا}^2}\,\text{و لا} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\times\frac{1\times3\times5\times\cdots(2\text{ن}-1)}{2^{\text{ن}}}\,\text{ل}^{-\frac{2\text{ن}+1}{2}}$

۱۴۔ $\int_{0}^{\infty} \text{و}^{-\text{ا}^2\text{لا}^2}\,\text{جم}\,2\text{ب لا و لا} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\text{ا}}\,\text{و}^{-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}}$

۱۵۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جم ا لا و لا}}{(\text{ب}^2+\text{لا}^2)^2} = \frac{\pi}{2^2\times1}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}^2}+\frac{1}{\text{ب}^3}\right)\text{و}^{-\text{ا ب}}$

۱۶۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جم ا لا و لا}}{(\text{ب}^2+\text{لا}^2)^3} = \frac{\pi}{2^3\times2\times1}\left(\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^3}+\frac{3\text{ا}}{\text{ب}^4}+\frac{3}{\text{ب}^5}\right)\text{و}^{-\text{ا ب}}$

۱۷۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا جب ا لا و لا}}{(\text{ب}^2+\text{لا}^2)^2} = \frac{\pi}{2^2\times1}\,\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{و}^{-\text{ا ب}}$

۱۸۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا جب ا لا و لا}}{(\text{ب}^2+\text{لا}^2)^3} = \frac{\pi}{2^3\times2\times1}\left(\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ا}}{\text{ب}^3}\right)\text{و}^{-\text{ا ب}}$

۱۹۔ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب ا لا}}{(\text{ب}^2+\text{لا}^2)^2}\,\frac{\text{و لا}}{\text{لا}} = \frac{\pi}{2\text{ب}^4}\left\{1-\frac{\text{ا ب}+2}{2}\,\text{و}^{-\text{ا ب}}\right\}$

۲۰۔ $\int_{ب}^{\infty}$ قو$^{-ا^2 لا^2}$ جب ۲ ب لا $\frac{فرلا}{لا} = \frac{\sqrt{\pi}}{ا} \int_{ب}^{ب}$ قو$^{-\frac{لا^2}{ا^2}}$ فرلا

۲۱۔ تکملہ $\int_{ب}^{\infty} \frac{لا^{ن - \frac{1}{2}} فرلا}{(ا + ب لا + ج لا^2)^{ن}}$ کو ابدال ما = ج لا + $\frac{ا}{لا}$ کے ذریعہ تحویل کرو، ا، ب، ج سب مثبت ہیں اور ثابت کرو کہ تکملہ کی قیمت یہ ہے

$$\sqrt{\pi}\ جا (ن - \frac{1}{2}) \div ج^{\frac{1}{2}} \{ب + ۲ \sqrt{ا ج}\}^{ن - \frac{1}{2}}\ جا (ن)$$

۲۲۔ اگر ع کی ہر مثبت قیمت کے لئے فہ (ع) اور اس کا مشتق فہ َ(ع) مسلسل ہوں اور اگر فہ (ع) محدود اعداد م اور ن کی جانب مستدق ہو جبکہ ع بالترتیب لاتناہی اور صفر کی طرف مائل ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) $\int_{ب}^{\infty}$ فرلا $\int_{ا}^{ب}$ فہ َ(لا ما) فرما = $\int_{ا}^{ب}$ فرما $\int_{ب}^{\infty}$ فہ َ(لا ما) فرلا

(۲) $\int_{ب}^{\infty} \frac{فہ (ب لا) - فہ (ا لا)}{لا}$ فرلا = (م - ن) لوک $\frac{ب}{ا}$

واضح ہو کہ فہ َ(لا ما) حاصل ضرب لا ما کا تفاعل ہے۔ مسئلہ (۲) فرولینی کا مسئلہ کہلاتا ہے۔

۲۳۔ ب > ا > ۰ ثابت کرو کہ

(۱) $\int_{ب}^{\infty} \frac{مس^{-1}(ب لا) - مس^{-1}(ا لا)}{لا}$ فرلا = $\frac{\pi}{2}$ لوک $\frac{ب}{ا}$

(۲) $\int_{ب}^{\infty} \frac{مسز (ب لا) - مسز (ا لا)}{لا}$ فرلا = لوک $\frac{ب}{ا}$

۲۴۔ ذیل کے نتائج قائم کرو

(۱) $\int_{ب}^{\infty} \left(\frac{قو^{-لا} - قو^{-۲لا}}{لا^2} - \frac{قو^{-۲لا}}{لا} \right)$ فرلا = ۱ - لوک ۲

(۲) $\int_{۰}^{\infty} \left\{ (ن - \frac{١}{۲}) قو^{-لا} + (\frac{١}{لا} + \frac{١}{۲})(قو^{-ن لا} - قو^{-\frac{١}{۲} لا}) \right\} \frac{ورلا}{لا}$

$= (ن - \frac{١}{۲}) لوک ن - (ن - \frac{١}{۲})$

۲۵- مثال ۲۵ مشق ۱۴ کے دوسرے تکملہ کو تفرق کرنے سے مثال ۲۶ مشق ۱۳ کی مساوات قائم کرو۔

۲۶- اگر $جے(لا) = \frac{١}{\pi} \int_{۰}^{\pi} جم (لا جم طہ) ورطہ$ تو ثابت کرو کہ (ب > ۰)

$$\int_{۰}^{\infty} قو^{-ب لا} جے(لا) ورلا = \frac{١}{\sqrt{١ + ب^۲}}$$

جہاں جے (لا) سے مراد ہے $J(x)$

۲۷- اگر ۰ < م < ١ تو ثابت کرو کہ

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{جے(لا) ورلا}{لا^{١-م}} = \frac{جا(م) جا(\frac{م}{۲}) جا(\frac{١-م}{۲}) جب م \pi}{۲ \pi^{\frac{۳}{۲}} ۲^{م}}$$

۲۸- اگر $و = \frac{۲ق}{\pi} \int_{۰}^{\infty} قو^{-کہ عہ^۲ ت} \frac{جب لا عہ}{عہ} ورعہ$ تو ثابت کرو کہ

(١) $\frac{جف و}{جف ت} = کہ \frac{جف^۲ و}{جف لا^۲}$ (۲) و = ق جبکہ ت = ۰، لا > ۰.

۲۹- اگر $و = \frac{١}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ف(ع) قو^{-عہ^۲} ورعہ$ جہاں $ع = لا + ۲عہ \sqrt{کہ ت}$ تو ثابت کرو کہ

(١) $\frac{جف و}{جف ت} = کہ \frac{جف^۲ و}{جف لا^۲}$ (۲) و = ف(لا) جبکہ ت = ۰

[یہ دیکھا جائے کہ

$$\frac{جفاف(ع)}{جف\,ت} = \frac{فرف(ع)}{فرع}\,\frac{جف\,ع}{جف\,ت} = فَ(ع)\,\frac{عما\sqrt{کما}}{\sqrt{ت}}$$

$$فًَ(ع) = \frac{۱}{۲\sqrt{کت}}\,\frac{فرفَ(ع)}{فرعما}$$

اور فَ (ع) کو محدود مانو جبکہ $ع \to \pm\infty$

۳۰۔ اگر $و = \frac{۲ق}{\sqrt{\pi}} \int_{\cdot}^{\frac{لا}{۲\sqrt{کت}}} و^{-عما^{۲}}\,فرعما$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{جف\,و}{جف\,ت} = ک\,\frac{جف^{۲}و}{جف\,لا^{۲}}$ (۲) $\lim_{ت\to\cdot} و = ق،\ لا > \cdot$

۳۱۔ اگر $ع = \int_{\cdot}^{\infty} \frac{فرت}{\sqrt{(لا+ت)(ما+ت)(ی+ت)}}$ اور لا، ما، ی سب مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{جف\,ع}{جف\,لا} + \frac{جف\,ع}{جف\,ما} + \frac{جف\,ع}{جف\,ی} = -\frac{۱}{\sqrt{لا\,ما\,ی}}$

(۲) $۲(لا - ما)\,\frac{جف^{۲}ع}{جف\,لا\,جف\,ما} = \frac{جف\,ع}{جف\,لا} - \frac{جف\,ع}{جف\,ما}$

(۳) $لا\,\frac{جف\,ع}{جف\,لا} + ما\,\frac{جف\,ع}{جف\,ما} + ی\,\frac{جف\,ع}{جف\,ی} = -\frac{۱}{۲}\,ع$

۳۲۔ اگر $ع = \int_{\cdot}^{\infty} و^{-لا^{۲}}\,جم\left(\frac{ر^{۲}}{لا^{۲}}\right) فرلا$، $و = \int_{\cdot}^{\infty} و^{-لا^{۲}}\,جب\left(\frac{ر^{۲}}{لا^{۲}}\right) فرلا$

تو ثابت کرو کہ $\frac{فر^{۲}ع}{فرر^{۲}} = ۴و$، $\frac{فر^{۲}و}{فرر^{۲}} = -۴ع$

اور پھر ثابت کرو کہ

$$\text{ع} = \frac{\pi}{۲}\,\text{ق}^{-ا/\sqrt{۲}}\,\text{جم}\left(\frac{ا}{\sqrt{۲}}\right)،\quad \text{و} = \frac{\pi}{۲}\,\text{ق}^{-ا/\sqrt{۲}}\,\text{جب}\left(\frac{ا}{\sqrt{۲}}\right)$$

۳۳۔ ثابت کرو کہ $\int_{۰}^{\infty}\frac{\text{لا جب ۲ ا لا فرلا}}{۱+\text{لا}^{۴}} = \int_{۰}^{\infty}\text{لا جب ۲ ا لا فرلا}\int_{۰}^{\infty}\text{ق}^{-\text{لا ما}}\,\text{جب ما فرما}$
اور پھر تکمل کی ترتیب بدلنے اور مثال ۲ ۳۲ کو استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ
تکمل کی قیمت $\frac{۱}{۲}\,\pi\,\text{ق}^{-ا\sqrt{۲}}\,\text{جب}\,(ا\sqrt{۲})$ ہے۔

ذیل کے نتائج حاصل کرو

(۱) $\int_{۰}^{\infty}\frac{\text{جم ۲ ا لا فرلا}}{۱+\text{لا}^{۴}} = \frac{\pi}{۲}\,\text{ق}^{-ا\sqrt{۲}}\,\text{جب}\left(ا\sqrt{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)$

(۲) $\int_{۰}^{\infty}\frac{\text{لا}^{۲}\,\text{جم ۲ ا لا فرلا}}{۱+\text{لا}^{۴}} = \frac{\pi}{۲}\,\text{ق}^{-ا\sqrt{۲}}\,\text{جم}\left(ا\sqrt{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)$

(۳) $\int_{۰}^{\infty}\frac{\text{لا}^{۳}\,\text{جب ۲ ا لا فرلا}}{۱+\text{لا}^{۴}} = \frac{\pi}{۲}\,\text{ق}^{-ا\sqrt{۲}}\,\text{جم}\,(ا\sqrt{۲})$ ۔

۳۴۔ دفعہ ۲، مثال ۷، مساوات ۱۰ سے ذیل کے نتائج حاصل کرو

(۱) $\int_{-\infty}^{\infty}\text{جم}\,(ا\,\text{لا}^{۲}+۲\,\text{ب}\,\text{لا})\,\text{فرلا} = \sqrt{\frac{\pi}{۲ا}}\left\{\text{جم}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)+\text{جب}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)\right\}$

(۲) $\int_{-\infty}^{\infty}\text{جب}\,(ا\,\text{لا}^{۲}+۲\,\text{ب}\,\text{لا})\,\text{فرلا} = \sqrt{\frac{\pi}{۲ا}}\left\{\text{جم}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)-\text{جب}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)\right\}$

(۳) $\int_{۰}^{\infty}\text{جم}\,(ا\,\text{لا}^{۲})\,\text{جم ۲ ب لا فرلا} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲ا}}\left\{\text{جم}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)+\text{جب}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)\right\}$

(۴) $\int_{۰}^{\infty}\text{جب}\,(ا\,\text{لا}^{۲})\,\text{جم ۲ ب لا فرلا} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲ا}}\left\{\text{جم}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)-\text{جب}\left(\frac{\text{ب}^{۲}}{ا}\right)\right\}$

۳۵۔ اگر ل > ۰، ل + م + ن > ۰، ۱ > ن > ۰۔ تو ثابت کرو کہ

$$\int_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{د ما}}{(1+\text{ما})^{\text{ص}+1}\,\text{ما}^{\text{ن}}} \int_{\text{ب}}^{1} \text{لا}^{\text{ل}-1}(1+\text{لا ما})^{\text{ص}}\,\text{د لا} = \frac{\pi}{\text{جب ن}\pi} \cdot \frac{\text{جا(ل) جا(ل+ص+ن)}}{\text{جا(ل+ص+1) جا(ل+ص)}}$$

[شلو ملش]

۴۶۔ اگر م > ۰، ن > ۰ تو ثابت کرو کہ

(۱) $$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ن ما}}\,\text{د ما} \int_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{جم م لا جب لا ما}}{\text{لا}}\,\text{د لا} = \int_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{جم م لا}}{\text{لا}}\,\text{د لا} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ن ما}}\,\text{جب لا ما د ما}$$

(۲) $$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ن ما}}\,\text{د ما} \int_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{جب م لا جم لا ما}}{\text{لا}}\,\text{د لا} = \int_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{جب م لا}}{\text{لا}}\,\text{د لا} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ن ما}}\,\text{جم لا ما د ما}$$

اور مثال ۴ دفعہ ۲ کے تکملوں کی قیمتیں حاصل کرو۔

۴۷۔ منحنی $\text{ما} = \text{جا(لا)} = \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ع}}\,\text{ع}^{\text{لا}-1}\,\text{د ع}$ کو مرتسم کرو۔ ثابت کرو کہ اسکی اقل قیمت ہے لا = ۱ اور لا = ۲ کے درمیان اور یہ محور لا کی طرف ہمیشہ محدب ہے۔

۴۸۔ ثابت کرو کہ

$$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{جم لا د لا} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ما لا}}\,\text{د ما} = \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{د ما} \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{و}^{-\text{ما لا}}\,\text{جم لا د لا}$$

اس تکملہ سے اور جم لا کی بجائے جب لا رکھنے سے جو متناظر تکملے حاصل ہوتے ہیں دفعہ ۲ کے مثال ۷ (۹) کے تکملے حاصل کرو۔ [لگاؤ دفعہ ۳، مسئلہ ۴]

باب دہم

فوریر کے سلسلے

۷۵ - فوریر کے سلسلے - فرض کرو کہ بعت $-\pi \leq$ لا $\leq \pi$ کے لئے تفاعل ف (لا) ذیل کے لاانتہاہی سلسلہ سے تعبیر ہو سکتا ہے

$$\text{ف(لا)} = \text{ا}_. + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ا}_\text{ن} \text{ جم ن لا} + \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ب}_\text{ن} \text{ جب ن لا} \quad \ldots\ldots(1)$$

نیز یہ بھی مان لو کہ ف (لا) کا تکملہ اس سلسلہ کو رقم بر رقم تکمل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے - ایسی صورت میں سر ول $\text{ا}_.$ ، $\text{ا}_\text{ن}$ ، $\text{ب}_\text{ن}$ کو بطور محدود تکملوں کے بیان کرنا ممکن ہے -

سب سے پہلے یہ قابل توجہ ہے کہ ذیل کے دونوں تکملے (م ، ن مثبت صحیح ہیں)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{جم م لا جم ن لا د لا} \text{ ، } \int_{-\pi}^{\pi} \text{جب م لا جب ن لا د لا}$$

صفر ہوتے ہیں اگر م ، ن غیر مساوی ہوں لیکن ان میں سے ہر ایک π کے مساوی ہے

اگر م = ن - نیز تکملہ $\int_{-\pi}^{\pi} \text{جم م لا جب ن لا د لا}$ ہمیشہ صفر ہوتا ہے - یہ نتائج جیوب اور

جیوب التمام کے حاصل ضربوں کو بطور حاصل جمع اور حاصل تفریق کے بیان کرنے کے باسانی ثابت ہو سکتے ہیں -

اب مساوات (۱) کے ہر رکن کو $-\pi$ سے π تک تکمل کرو ، سلسلہ کا ہر تکملہ سوائے پہلے کے صفر ہوتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے -

$\int_{-\pi}^{\pi} \text{ف(لا) ڈلا} = 2\pi\, \text{ا}$ یعنی $\text{ا} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ف(لا) ڈلا}$ .... (۲)

اب ن کی کوئی قیمت منتخب کرو، (۱) کے ہر رکن کو جم ن لا سے ضرب دو (جبکہ ن کی منتخبہ قیمت ہو) اور $-\pi$ سے π تک تکمل کرو، سلسلہ کا ہر تکملہ صفر ہوتا ہے سوائے اُس رقم کے تکملہ کے جس کے اندر جم ن لا شامل ہوتا ہے۔ اس طرح ہمیں ملتا ہے

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \text{ف(لا) جم ن لا ڈلا} &= \text{ا}_{\text{ن}} \int_{-\pi}^{\pi} \text{جم}^2 \text{ن لا ڈلا} \\ \text{ا}_{\text{ن}} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ف(لا) جم ن لا ڈلا} \end{aligned}\right\} \text{......(۳)}$$

اور آخر الامر اسی طرح جب ن لا کے ساتھ ضرب دینے سے

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ف(لا) جب ن لا ڈلا} \text{ ....(۴)}$$

اگر (۳) اور (۴) میں ہم فرض کریں کہ ن کو ترتیب وار قیمتیں ۱، ۲، ۳، ..... دی گئی ہیں تو ہمیں سب سر ا_1، ا_2 ..... ب_1، ب_2 ..... حاصل ہو جائینگے اور سلسلہ (۱) پورے طور پر معیّن ہو جائیگا۔

سلسلہ (۱) کو فوریئے یا فوریئر کا سلسلہ کہتے ہیں اور یہ مشاہدہ طلب ہے کہ سلسلہ (۱) کا دوری تفاعل ہے جس کا دور 2π ہے۔ اسلئے اگر ف(لا) دوری تفاعل نہ ہو جس کا دور 2π ہو تو یہ ناممکن ہوگا کہ سلسلہ (۱)، ف(لا) کو وسعت $(-\pi، \pi)$ سے باہر تعبیر کر سکے۔ دراصل موجودہ بحث میں وسعت $(-\pi، \pi)$ سے باہر تفاعل ف(لا) کی نوعیت سے ہمیں سروکار نہیں اور تفاعل کی وسعت سے متعلق اس قید کو طالب علم ہمیشہ پیش نظر رکھے۔ سر دریافت کرنے کے طریقہ کی توضیح کے لئے اس جگہ ہم ایک دو مثالیں حل کرینگے، ان سے یہ بھی معلوم ہوگا کہ ہمارا یہ مفروضہ کہ تفاعل فوریئے

سلسلہ سے تعبیر ہو سکتا ہے پورے دور کے لئے بھی ہمیشہ درست نہیں۔

مثال ۱۔ ف (لا) = لا

تھوڑے تکمل سے ظاہر ہے کہ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{لا دلا} = 0 ,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \text{لا جم ن لا دلا} = 0 ، \text{اسلئے}$$

$$\text{ا}_0 = 0 ،\ \text{ا}_\text{ن} = 0 ، \text{ن کی ہر قیمت کے لئے۔}$$

$$\text{نیز } \int_{-\pi}^{\pi} \text{لا جب ن لا دلا} = -\frac{2\pi\ \text{جم ن}\pi}{\text{ن}} ، \text{جس سے کہ ب}_\text{ن} = -2\frac{\text{جم ن}\pi}{\text{ن}}$$

پس سلسلہ ہے

$$\text{لا} = 2\left(\frac{\text{جب لا}}{1} - \frac{\text{جب ۲لا}}{2} + \frac{\text{جب ۳لا}}{3} - \frac{\text{جب ۴لا}}{4} + \ldots\ldots\right)$$

یہ دیکھا جائے کہ ف $(\pi) = \pi$ ، ف $(-\pi) = -\pi$ ، لیکن جب لا $= \pm\pi$ تو سلسلہ کی قیمت صفر ہے، پس سلسلہ تفاعل کو تعبیر نہیں کرتا جبکہ لا $= \pi$ اور جبکہ لا $= -\pi$ ۔ نیز یہ بھی قابل توجہ ہے کہ سلسلہ کا استدقاق مشروط ہے۔

مثال ۲۔ ف (لا) = لا^2

اس صورت میں ہمیں ملتا ہے

$$\text{ا}_0 = \frac{\pi^2}{3} ،\ \text{ا}_\text{ن} = \frac{4\ \text{جم ن}\pi}{\text{ن}^2} ،\ \text{ب}_\text{ن} = 0$$

$$\text{لا}^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\text{جم لا}}{1^2} - \frac{\text{جم ۲لا}}{2^2} + \frac{\text{جم ۳لا}}{3^2} - \frac{\text{جم ۴لا}}{4^2} + \ldots\ldots\right)$$

دونوں صورتوں میں جبکہ لا $= \pi$ اور لا $= -\pi$ سلسلہ کی قیمت ہے
[دیکھو مثال ۲۲(۲) مشق ۱۳]

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{3} + 4\,\frac{\pi^2}{6} = \pi^2$$

پس اس صورت میں سلسلہ تفاعل کو تعبیر کرتا ہے دونوں صورتوں میں جبکہ $\text{لا} = \pi$ اور $\text{لا} = -\pi$ - یہ دیکھا جائے کہ سلسلہ سمت $-\pi \leqq \text{لا} \leqq \pi$ کے اندر مسلسل تفاعل ہے (مسئلہ ۳ دفعہ ۶۲) - سلسلہ لا کی ہر قیمت کے لئے مسلسل ہے لیکن سمت $(-\pi، \pi)$ کے باہر لا^2 کو تعبیر نہیں کرتا - مثلاً $\text{لا} = \pi$ سے $\text{لا} = 3\pi$ تک یہ $(\text{لا} - 2\pi)^2$ کو تعبیر کرتا ہے -

مثال ۳ - $\text{ف}(\text{لا}) = ۰$، $\text{لا} = -\pi$ سے $\text{لا} = ۰$ تک اور $\text{ف}(\text{لا}) = ۱$، $\text{لا} = ۰$ سے $\text{لا} = \pi$ تک -

تفاعل ف (لا) ایک محدود عدم تسلسل رکھتا ہے $\text{لا} = ۰$ کے لئے دفعہ (۶۳) - سلسلہ کی کیا قیمت ہوگی جبکہ $\text{لا} = ۰$، پورے معائنہ سے پیشتر یہ کسی طور پر صاف ظاہر نہیں ہے کہ اسکی کوئی معیّن قیمت ہوگی -

$$\text{ا}_۰ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ف}(\text{لا})\,\text{ولا} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} ۰\,\text{ولا} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} ۱\,\text{ولا} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ا}_\text{ن} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{ف}(\text{لا})\,\text{جم ن لا}\,\text{ولا} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ۰\,\text{ولا} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} ۱\,\text{جم ن لا}\,\text{ولا} = ۰$$

$$\text{ب}_\text{ن} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} ۱\,\text{جب ن لا}\,\text{ولا} = \frac{1 - \text{جم ن}\pi}{\text{ن}\pi}$$

اس لئے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\text{جب لا}}{1} + \frac{\text{جب ۳لا}}{3} + \frac{\text{جب ۵لا}}{5} + \ldots\ldots\right)$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ جب $\text{لا} = ۰$ تو سلسلہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے - جب $\text{لا} = \pi$ تو سلسلہ $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے لیکن $\text{ف}(\pi) = ۱$، اور جب $\text{لا} = -\pi$ تو سلسلہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے لیکن $\text{ف}(-\pi) = ۰$

۶۷ - مسئلہ کا بیان کرنا - دفعہ بالا کا عمل اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ کسی تفاعل کو فوریئے کے سلسلے سے تعبیر کرنا ممکن ہے، لیکن یہ مفروضہ آسانی سے

قبول نہیں کر لیا جا سکتا۔ دراصل ایک مدت سے یہ دیکھ لیا گیا ہے کہ یہ نامستحکم ہے۔ اس مفروضہ کے جواز کو ثابت کرنے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ ہم یہ دکھا دیں کہ جیسے ن لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے سلسلہ (۱) کی پہلی (۲ ن + ۱) رقموں کا مجموعہ $س_{۲ن+۱}$ جبکہ اس کے سر (۲)، (۳)، (۴) کی رو سے دریافت کرلئے جائیں فی الحقیقت قیمت ف (لا) کی طرف مستدق ہوتا ہے۔
زیادہ وضاحت کی خاطر گزشتہ دفعہ کی مساواتوں (۲)، (۳)، (۴) میں تکمل کے متغیر کو ع فرض کرو اور فرض کرو کہ $س_{۲ن+۱}$ سے ذیل کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

$$س_{۲ن+۱} = ا + \sum^{ر=ن} (ا_ن \text{ جم } ن لا + ب_ن \text{ جب } ن لا)$$

یہ مجموعہ اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$س_{۲ن+۱} = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{۱}{۲} + \sum_{ر=۱}^{ر=ن} \text{ جم } ر(ع - لا) \right\} ف(ع) \, دع \quad \ldots (۱)$$

یا خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلہ کو جمع کرنے سے

$$س_{۲ن+۱} = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ف(ع) \frac{\text{جب} (۲ن+۱)\frac{ع-لا}{۲}}{۲ \text{ جب } \frac{ع-لا}{۲}} \, دع$$

فرض کرو کہ ع - لا = ۲ و، ہمیں حاصل ہوگا

$$س_{۲ن+۱} = \frac{۱}{\pi} \int_{-\frac{\pi+لا}{۲}}^{\frac{\pi-لا}{۲}} ف(لا + ۲و) \frac{\text{جب} (۲ن+۱) و}{\text{جب } و} \, دو \quad \ldots\ldots (۲)$$

آخر الامر تکمل کی سعت کو ان حصوں میں تقسیم کرو $[-\frac{۱}{۲}(\pi+لا), ۰]$ اور $[۰, \frac{۱}{۲}(\pi-لا)]$،

اسطرح سے دو تکملے حاصل ہوتے ہیں پہلے میں و کی بجائے - و رکھو اس طرح $\text{س}_{\text{۲ن+۱}}$ کے لئے ذیل کے دو تکملے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{س}_{\text{۲ن+۱}} = \frac{\text{۱}}{\pi}\int^{\frac{\pi-\text{لا}}{\text{۲}}} \text{ف}(\text{لا}+\text{۲و})\frac{\text{جب}(\text{۲ن+۱})\text{و}}{\text{جب و}}\,\text{د و}$$

$$+\frac{\text{۱}}{\pi}\int^{\frac{\pi+\text{لا}}{\text{۲}}} \text{ف}(\text{لا}-\text{۲و})\frac{\text{جب}(\text{۲ن+۱})\text{و}}{\text{جب و}}\,\text{د و} \quad \ldots (\text{۳})$$

اب ف (لا) پر جو قیود ہیں انہیں ہم بیان کرتے ہیں - یہ محض کافی ہیں ضروری نہیں -

تفاعل پر قیود - (۱) تفاعل کو محدود ہونا چاہیے جس کی عددی قیمتوں کی اوپر کی حد مثلاً ع ہو (۲) بالعموم اسے مسلسل ہونا چاہیے لیکن اسمیں محدود تعداد کی محدود عدم تسلسلیاں ہو سکتی ہے جن کی دفعہ ۶۳ میں توضیح کی گئی ہے (۳) اسکی موڑ کی قیمتوں کی تعداد محدود ہونی چاہیے (مثلاً تفاعل ایسا جب $\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$ نہیں ہو سکتا)

اگر عا کوئی چھوٹا گر ثابت مثبت عدد ہو تو وقفہ (ج - عا، ج + عا) کو ہم ج کی پڑوس یا قرب کہینگے - اکثر قیمت ج (دفعہ ۵ حصہ اول) کی بجائے ہم نقطہ ج کہینگے -

ترقیم ف (لا ± ۰) کو اکثر استعمال کیا جائیگا (دفعہ ۴۴ حصہ اول، دفعہ ۲۲)۔

اب سوال ہمارے سامنے یہ ہے - ہمیں یہ دکھانا چاہیے کہ جب، ن لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو $\text{س}_{\text{۲ن+۱}}$ قیمت

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left\{\text{ف}(\text{لا}+\text{۰})+\text{ف}(\text{لا}-\text{۰})\right\}$$

کیطرف مائل ہوتا ہے اگر لا، $\pm\pi$ کے مساوی نہ ہو اور

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left\{\text{ف}(-\pi+\text{۰})+\text{ف}(\pi-\text{۰})\right\}$$

طرف مائل ہوتا ہے اگر لا، – π یا π کے مساوی ہو، نیز اگر لا کسی نقطہ غیر تسلسل کے قریب میں نہ ہو تو استدقاق یکساں ہوتا ہے۔

جب ف (لا) مسلسل ہو تو $س_{۲ن+۱}$، ف (لا) کی طرف مستدق ہوتا ہے کیونکہ اس صورت میں ف (لا + ۰) = ف (لا) = ف (لا – ۰)، اگر ج نقطہ عدم تسلسل ہو تو $س_{۲ن+۱}$ قیمت $\frac{1}{2}$ {ف (ج + ۰) + ف (ج – ۰)} کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اگر ف (π) اور ف (– π) مساوی نہ ہوں تو نقاط π اور – π کو نقاط عدم تسلسل میں شمار کرنا چاہئے۔

۷۷ – ڈیرشلے کا تکملہ۔ ذیل کے تکملہ پر غور کرو، اسے **ڈیرشلے کا تکملہ** کہتے ہیں

$$\int_{۰}^{ب} فہ(و)\ جب\ م\ و\ د\ و \quad \ldots\ldots\ (۱)$$

جہاں م کوئی مثبت عدد صحیح یا کسر اور فہ(و) ان شرائط کو پورا کرتا ہے جنکی دفعہ گذشتہ میں ف (لا) کی صورت میں تخصیص کی گئی ہے، حدود ۰، ب میں اور تفاعل فہ(و) میں متبدل لاشریک ہو سکتا ہے، مثلاً فہ(و)، ف (لا + ۲ و) ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ و کی قیمتیں $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$، ...... $ا_پ$ تعداد میں پ ایسی ہیں جنکے جواب میں فہ(و) کی یا تو موڑ کی قیمت ہے یا یہ غیر مسلسل ہے اور فرض کرو کہ | فہ(و) | کم ہے ع سے۔

تفاعل فہ(و) ہر وقفہ ($۰، ا_۱$)، ($ا_۱، ا_۲$)، ...... میں یک آہنگ ہے، اس لئے قیمتوں $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$ ...... $ا_پ$ سے جو تکملہ (۱)، (پ + ۱) تکملوں میں تقسیم ہو جاتا ہے انمیں سے ہر ایک تکملہ پر اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ لگ سکتا ہے۔

اب $\int_{\text{ر}}^{\text{ر}+1} \text{فا(و) جب م و د و} = \text{فا(ر)} \int_{\text{ر}}^{\text{ضا}} \text{جب م و د و} + \text{فا(ر+1)} \int_{\text{ضا}}^{\text{ر}+1} \text{جب م و د و}$

$$= \text{فا(ر)} \frac{\text{جم م ر} - \text{جم م ضا}}{\text{م}} + \text{فا(ر+1)} \frac{\text{جم م ضا} - \text{جم م (ر+1)}}{\text{م}}$$

اسلئے $\left|\int_{\text{ر}}^{\text{ر}+1} \text{فا(و) جب م و د و}\right| \le \frac{2}{\text{م}}|\text{فا(ر)}| + \frac{2}{\text{م}}|\text{فا(ر+1)}| < \frac{4\text{ع}}{\text{م}}$

اور $\left|\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(و) جب م و د و}\right| < \frac{4(\text{پ}+1)\text{ع}}{\text{م}}$ ....(۲)

مقادیر پ، ع متبدل لا پر منحصر نہیں ہیں، اسلئے جب، م لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو تکملہ (۱) یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔

نوٹ۔ اگر پ، لا پر منحصر ہو تو بھی ہم تسلیم کر سکتے ہیں کہ اسکی قیمت کی محدود اوپر کی حد ہے جو لا پر منحصر نہیں۔

اسی طرح سے دکھایا جا سکتا ہے کہ تکملہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(و) جم م و د و} \qquad \text{..........(۳)}$$

یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جیسے م لامتناہی ہو۔

اب فرض کرو کہ $\text{ا} < \text{ب}$ یعنی قیمتیں ا، ب مثبت ہیں۔ ہم ثابت کرینگے کہ تکملہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا(و)} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}} \text{د و} \qquad \text{..........(۴)}$$

یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ م لامتناہی کی طرف جاتا ہے۔

$$\int_{\text{ر}}^{\text{ر}+1} \text{فا(و)} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}} \text{د و} = \text{فا(ر)} \int_{\text{ر}}^{\text{ضا}} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}} \text{د و} + \text{فا(ر+1)} \int_{\text{ضا}}^{\text{ر}+1} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}} \text{د و}$$

$$= فما(\text{ل}) \int_{م\,\text{ل}}^{م\,\text{ضا}} \frac{جب\,\text{ی}}{\text{ی}}\, ر\text{ی} + فما(\text{ل}_{+1}) \int_{م\,\text{ضا}}^{م\,\text{ل}_{+1}} \frac{جب\,\text{ی}}{\text{ی}}\, ر\text{ی}$$

لیکن ر، ضا، ل+۱ سب مثبت ہیں اور تکملہ $\int_{م}^{\infty} \frac{جب\,\text{ی}}{\text{ی}}\, ر\text{ی}$ مستدق ہے اسلئے

ہم م اِس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ ہر ایسے م کے لئے جو م سے بڑا ہو بائیں ہاتھ کے دونوں تکملوں میں سے ہر ایک ایک دی ہوئی چھوٹی اختیاری مثبت مقدار صد سے کم ہو۔ اسی طریق سے جیسے لامساوی (۲) حاصل کی گئی تھی ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایسے م کے لئے جو م سے بڑا ہو

$$\left| \int_{ا}^{ب} فما(و) \frac{جب\,م\,و}{و}\, ر و \right| < ۲ (پ + ۱)\, ع\, صا$$

پس تکملہ (۴) مستدق ہوتا ہے جیسے بیان ہوا۔ صریحاً یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر ن > ب > ل۔

اس تحقیق کا ایک خاص نتیجہ یہ ہے کہ ن ← ∞ کے لئے فوریئے سلسلہ کے سروں ل، ب کی انتہا صفر ہوتی ہے کیونکہ ان سروں کی صورت وہی ہے جو اوپر بحث میں آنے والے تکملوں کی ہے۔ لیکن ل، ب کی چھٹائی کا رتبہ بالعموم $\frac{1}{ن}$ ہوگا جیسا لامساوی (۲) سے ظاہر ہے، پس اگر سلسلہ مستدق ہو بھی تو یہ استدقاق بالعموم شرطیہ ہوگا۔

۸۷۔ **سلسلوں کا جمع کرنا۔** مساوات (۳) دفعہ ۶۷ کا پہلا تکملہ لو اس میں ۲ ن + ۱ کی بجائے م رکھو اور متکمل کو اس شکل میں لکھو

$$ف(لا + ۲ و) \frac{و}{جب\,و} \times \frac{جب\,م\,و}{و} = فا(لا، و) \frac{جب\,م\,و}{و}$$

یعنی $فا(لا، و) = ف(لا + ۲ و) \frac{و}{جب\,و}$، $فا(لا، ۰) = ف(لا + ۰)$

اگر ا کوئی عدد ایسا ہو کہ $\text{٠} < \text{ا} < \frac{1}{2}(\pi - \text{لا})$ تو

$$\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi-\text{لا}}{2}} \text{ف}(\text{لا}+2\text{و})\frac{\text{جب م و}}{\text{جب و}}\,\text{دو} = \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا}،\text{و})\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{دو} + \int_{\text{ا}}^{\frac{\pi-\text{لا}}{2}} \text{فا}(\text{لا}،\text{و})\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{دو} \quad \ldots\ldots (1)$$

اگر لا ـ π کے مساوی نہ ہو تو (۱) کا موخر الذکر تکملہ اُن شرائط کو پورا کرتا ہے جو دفعہ بالا کے تکملہ (۴) پر عائد کئے گئے ہیں ۔ اسلئے

$$\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}} \int_{\text{ا}}^{\frac{\pi-\text{لا}}{2}} \text{فا}(\text{لا}،\text{و})\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{دو} = \text{٠} \quad \ldots\ldots (2)$$

اور تکملہ یکساں طور پر صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے ۔ پس

$$\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}} \int_{\text{ب}}^{\frac{\pi-\text{لا}}{2}} \text{ف}(\text{لا}+2\text{و})\frac{\text{جب م و}}{\text{جب و}}\,\text{دو} = \underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہا}} \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا}،\text{و})\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{دو} \quad \ldots\ldots (3)$$

اسکے بعد فرض کرو کہ ا بہت چھوٹا ہے ۔ تب ہم یہ مان سکتے ہیں کہ $\text{فا}(\text{لا}،\text{و})$ یکرنگیا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۸۲ کا خاتمہ) جیسے و صفر سے ا تک بڑھتا ہے اور اسلئے اوسط قیمت کے مسئلہ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا}،\text{و})\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{دو}$$

$$= \text{فا}(\text{لا}،\text{٠})\int_{\text{ب}}^{\text{ا}}\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{دو} + [\text{فا}(\text{لا}،\text{ا}) - \text{فا}(\text{لا}،\text{٠})]\int_{\text{ضا}}^{\text{ا}}\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{دو}$$

یا م و کی بجائے ی اور $[\text{فا}(\text{لا}،\text{ا}) - \text{فا}(\text{لا}،\text{٠})]$ کی بجائے $\text{سا}(\text{لا}،\text{ا})$ لکھنے سے

$$\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا}،\text{و})\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{دو} = \text{ف}(\text{لا}+\text{٠})\int_{\text{ب}}^{\text{م ا}}\frac{\text{جب ی}}{\text{ی}}\,\text{دی} + \text{سا}(\text{لا}،\text{ا})\int_{\text{م ضا}}^{\text{م ا}}\frac{\text{جب ی}}{\text{ی}}\,\text{دی} \quad \ldots\ldots (4)$$

جہاں $\text{فا}(\text{لا}،\text{٠})$ کی بجائے $\text{ف}(\text{لا}+\text{٠})$ لکھا گیا ہے ۔

ابتدا تو یہ کہ اگر لا کسی نقطہ عدم تسلسل کی پڑوس میں نہیں ہے۔ ایسا ہونے کی صورت دفعہ ۹۷ میں بحث میں لائی جائیگی۔ ہم ل کو اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں کہ ہر لا زیر بحث کے لئے اسا (لا ' ل) اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔ جب چھٹائی کے درجہ مطلوبہ کے موافق ل کا انتخاب کرلیا جائے تو ہم م کو اسقدر بڑا لیکن محدود لے سکتے ہیں کہ تکملہ

$$\int_{ل}^{م\,ل} \frac{جب\, ل}{ل}\, دل$$

اپنی انتہا $\frac{\pi}{2}$ سے اس قدر کم متفاوت ہو جسقدر ہم چاہیں اور ساتھ ہی تکملہ (۲) صفر سے اتنا کم متفاوت ہو جتنا ہم چاہیں۔ اب چونکہ (۴) میں سا (لا ' ل) کا ہر یقیناً محدود ہے (π سے بڑا نہیں) اسلئے م کو ہم اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ (۴) کے بائیں جانب کا رکن $\frac{1}{2}\pi$ ف (لا + ۰) سے اتنا کم متفاوت ہو جتنا ہم چاہیں خواہ لا کی کچھ ہی قیمت ہو (البتہ سوائے ان قیمتوں کے جو خارج کردی گئی ہیں) پس بالآخر یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\lim_{م\to\infty}\int_{ل}^{\frac{\pi-لا}{2}} ف(لا+2و)\frac{جب\, م\, و}{جب\, و}\, دو = \frac{\pi}{2}\, ف(لا+0) \qquad \ldots\ldots(5)$$

ٹھیک اسی طرح کے عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا ' π کے مساوی نہ ہو اور نہ ہی یہ نقطہ عدم تسلسل کی پڑوس میں ہو تو

$$\lim_{م\to\infty}\int_{ل}^{\frac{\pi+لا}{2}} ف(لا-2و)\frac{جب\, م\, و}{جب\, و}\, دو = \frac{\pi}{2}\, ف(لا-0) \qquad \ldots\ldots(6)$$

اور اسلئے

$$\lim_{ن\to\infty} س_{ن+1} = \frac{1}{2}\left\{ف(لا+0) + ف(لا-0)\right\} \qquad \ldots\ldots(7)$$

جہاں انتہا کی طرف استدقاق یکساں ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مساوات (۳) کی رو سے لا کی کسی دی ہوئی قیمت

کے لئے $س_{۲ن+۱}$ کی انتہا اس قیمت کے پڑوس میں صرف ف(لا) کے رویہ پر منحصر ہے۔

$س_{۲ن+۱}$ کی انتہا کا فیصلہ اس صورت میں جبکہ لا = π یا لا = −π باآسانی ہو سکتا ہے۔ اگر لا = π تو (۳) دفعہ ۷۶ سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$س_{۲ن+۱} = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} ف(\pi - ۲و)\frac{جب(۲ن+۱)و}{جب\, و}\, ﻋﺮ و$$

$$= \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\{ف(\pi-۲و)+ف(-\pi+۲و)\}\frac{جب(۲ن+۱)و}{جب\, و}\, ﻋﺮ و$$

سعت (۰، π) کو حصوں (۰، $\frac{\pi}{۲}$)، ($\frac{\pi}{۲}$، π) میں تقسیم کرنے سے اور حدود ($\frac{\pi}{۲}$، π) والے تکملہ میں و کی بجائے π − و رکھنے سے۔

ن = ∞ کے لئے انتہا ٹھیک پہلے کی طرح معلوم ہوتی ہے اور وہ ہے

$$\frac{۱}{۲}\{ف(\pi-۰)+ف(-\pi+۰)\}$$

اور یہی قیمت حاصل ہوتی ہے جبکہ لا = π۔

۷۹۔ عدم تسلسل اب فرض کرو کہ لا ایک نقطہ عدم تسلسل کی پڑوس میں ہے۔ نیز فرض کرو کہ شکل ۴۳ دفعہ ۹۳، ف(لا) کے گراف کو تعبیر کرتی ہے جہاں و ع = ج،

ا ع = ع م = ﻋﺎ اور و ا ≧ لا ≧ و ع۔ اگر لا = و کے تو معین ف(لا) اور ف(لا + ۲و)، ع ص کی مقابل جانبوں میں واقع ہوں گے جب تک کہ ۲و کم نہ ہو گے ع سے، یس تفاعل سا(لا، ا)

چھوٹا نہیں ہو سکتا جب تک کہ د کم نہ ہو ½ ک ع سے۔ اب اگر لا قیمت میں بہت قریب ہو ج سے یعنی اگر ک ع بہت چھوٹا ہو تو ا کی قیمت ایسی لی سکتی ہے جو اسماز (لا ، ل) ا کو چھوٹا بنا دے اور پھر م کی قیمت ایسی حاصل ہو سکتی ہے جو تکملہ (۳) دفعہ ۸۰ کو چھوٹا بنا دے اور (۴) دفعہ ۸۰ میں ف (لا + ۰) کا سر π/۲ سے اتنا کم متفاوت ہو جتنا ہم چاہیں۔ لیکن اگر لا کو ج سے اور بھی زیادہ قریب لیا جائے تو لا کی مطلوبہ قیمت بتدریج کم ہوتی جاتی ہے اور م کی مطلوبہ قیمت بڑھتی جاتی ہے جس کی وجہ سے استدقاق نہایت سست ہوتا جاتا ہے۔ لا کی کسی معینہ قیمت کے لئے استدقاق کا وجود ضرور ہے مگر ایسا عدد م ملنا ممکن نہیں کہ جب م > م تو فرق

$$\left| \int_{ب}^{\frac{\pi}{2} - لا} ف(لا + ۲و) \frac{جب\ م\ و}{جب\ و} \, د و - \frac{\pi}{۲} ف(لا + ۰) \right|$$

دئے ہوئے عدد سے کم ہو وقفہ (ج - عا ، ج) میں لا کی ہر قیمت کے لئے۔ دوسرے الفاظ میں استدقاق یکساں نہیں رہتا جبکہ لا ، ج کے قریب آتا ہے۔

جب ، لا وقفہ (ج - عا ، ج) کے درمیان واقع ہو تو تکملہ (۶) دفعہ ۸۰ کا استدقاق یکساں ہوتا ہے برعکس اس کے جب ، لا وقفہ (ج ، ج + عا) کے درمیان ہو تو تکملہ (۶) ہے جو غیر یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ جب ، لا = ج تو کوئی خصوصیت نہیں پیدا ہوتی اور

س~ن~۲+۱~ ، ½ {ف (ج + ۰) + ف (ج - ۰)} کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ نقطہ عدم تسلسل پر سلسلہ کی قیمت دفعہ ۵۷ امثلہ ۱ تا ۳ میں دکھائی گئی ہے۔

۸۰ - مبدأ اور دور کی تبدیلی۔ یہاں تک لا کی سعت - π سے π رہی ہے لیکن اسی خوش اسلوبی سے سعت ۰ تا ۲ π لیجا سکتی

ترسیمی نقطۂ نظر سے سعت کی یہ تبدیلی مبدأ کو (− π ، ۰) پر لیجانے کے معادل ہے اور تحلیلی نقطۂ نظر سے لا کی بجائے ہم لا − π رکھتے ہیں۔ اگر ف (لا − π) کو فا (لا) سے تعبیر کریں تو سروں کی قیمتیں یہ معلوم ہوتی ہیں

$$\text{ا}_{\circ} = \frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{2\pi}\text{فا(لا) د لا}\ \ldots\ (۱) \qquad \text{ا}_{\text{ن}} = \frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{2\pi}\text{فا(لا) جم ن لا د لا}\ \ldots\ (۲)$$

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{2\pi}\text{فا(لا) جب ن لا د لا}\ \ldots\ldots\ (۳)$$

سلسلہ کی قیمت جبکہ ہر دو لا = ۰ اور لا = ۲π ہے

$$\frac{1}{2}\left\{\text{فا(۰)} + \text{فا(۲}\pi\text{)}\right\}$$

نیز دور کوئی عدد معین لیا جا سکتا ہے مثلاً ۲ ل، ہمیں لا کی بجائے صرف $\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}$ رکھ دینا ہے۔ اگر ف $\left(\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}\right)$ کی بجائے فا (لا) رکھیں تو سروں کے لئے ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ل}}\int_{-\text{ل}}^{\text{ل}}\text{فا(لا) جم}\ \frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}\ \text{د لا}\ \ldots\ldots\ (۴)$$

$$\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ل}}\int_{\circ}^{2\text{ل}}\text{فا(لا) جم}\ \frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}\ \text{د لا}\ \ldots\ldots\ (\bar{۴})$$

اور $\text{ا}_{\text{ن}}$ اور $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی مماثل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ضابطہ (۴) میں سعت (−ل، ل) مضمر ہے اور ($\bar{۴}$) سعت (۰، ۲ل) کے لئے زیادہ موزوں ہے۔

ان ضابطوں کو حفظ یاد کرنے کی ضرورت نہیں۔ عملی صورتوں میں مناسب زاویہ ن لا یا $\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}$ کی جیب یا جیب التمام سے ضرب دیکر مناسب سعت پر تکمل کرنا کافی ہوگا۔

۸۱۔ جیب کے سلسلے اور جیب التمام کے سلسلے۔ فرض کرو کہ دفعہ ۷۵ کا

ف (لا) طاق تفاعل ہے یعنی ف (-لا) = - ف (لا)، اس صورت میں

$\int_{-\pi}^{\pi}$ ف (لا) جم ن لا ولا = $\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) جم ن لا ولا + $\int_{0}^{\pi}$ ف (-لا) جم ن لا ولا = ۰

پس $ا_۰$ = ۰ نیز $ا_ن$ = ۰ لیکن $ب_ن$ کے لئے حاصل ہوتا ہے

$ب_ن = \frac{۱}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) جب ن لا ولا $- \frac{۱}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (-لا) جب ن لا ولا

$= \frac{۲}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) جب ن لا ولا .... (۱)

پس ف (لا) کے لئے جیب کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے

ف (لا) = $\sum_{ن=۱}^{\infty}$ $ب_ن$ جب ن لا .... (۲)

جہاں $ب_ن$ (۱) سے ملتا ہے۔ سلسلہ صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۰ اور لا = π اس لئے ان قیمتوں کے لئے یہ تفاعل کو تعبیر نہیں کرتا جب تک کہ ف (۰) اور ف (π) صفر نہ ہوں۔

بخلاف اس کے فرض کرو کہ ف (لا) جفت تفاعل ہے یعنی ف (-لا) = ف (لا) اس صورت میں $ب_ن$ = ۰ اور

$ا_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) ولا ...... (۳)، $ا_ن = \frac{۲}{\pi}\int_{0}^{\pi}$ ف (لا) جم ن لا ولا .... (۴)

اس طرح ف (لا) کے لئے جیب التمام سلسلہ حاصل ہوتا ہے

ف (لا) = $ا_۰$ + $\sum_{ن=۱}^{\infty}$ $ا_ن$ جم ن لا .... (۵)

جہاں $ا_۰$، $ا_ن$ (۳) اور (۴) سے ملتے ہیں۔

جیب التمام سلسلۂ تفاعل کو دونوں صورتوں میں تعبیر کرتا ہے جبکہ لا = ۰ اور لا = π کیونکہ

½ { ف (۰+) + ف (۰−) } = ½ { ف (۰+) + ف (۰+) } = ف (۰)

½ { ف (π−۰) + ف (−π+۰) } = ½ { ف (π−۰) + ف (π−۰) } = ف (π)

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اوپر کے ضابطے (۱)۔ ۔ ۔ (۵) کیا ہو جاتے ہیں جبکہ دور ۲ل ہو۔

۸۲۔ عام امور کا ذکر۔ جب لا کی سعت پورا دور ۲π یا ۲ل ہو تو ف (لا) کے لئے فوریئر کا سلسلہ صرف ایک ہی ہوگا جہاں اُ، بُ گزشتہ دفعات کے بموجب حاصل ہوتے ہیں۔ صورت حال اور ہو جاتی ہے جبکہ لا کی وسعت پورے دور کا صرف کوئی حصہ ہو۔ فرض کرو کہ ف (لا) دیا گیا ہے سعت (۰، π) کے لئے۔ تب ایک ایسا تفاعل مثلاً فا (لا) حاصل کرنے کے لئے جو پورے دور کے لئے معلوم ہو ہم کوئی تفاعل فہ (لا) سعت (−π، ۰) کے لئے ایسا انتخاب کر سکتے ہیں کہ فا (لا) = فہ (لا) سعت لا = −π تا لا = ۰ کے لئے لیکن فا (لا) = ف (لا) سعت لا = ۰ سے لا = π تک اب صرف ایک سلسلہ ہے جو فا (لا) کو تعبیر کریگا، یہ سلسلہ فہ (لا) کو تعبیر کریگا سعت (−π، ۰) میں اور ف (لا) کو سعت (۰، π) میں لیکن سر دونوں تفاعلوں فہ (لا) اور ف (لا) پر منحصر ہونگے۔ پس دور کے ایک حصہ پر تفاعل کو تعبیر کرنے کے لئے ہم سلسلوں کی کوئی سی تعداد حاصل کر سکتے ہیں لیکن صرف جیب اور جیب التمام کے سلسلے عملی نقطہ نظر سے ضروری ہیں۔ ان دونو صورتوں میں ف (لا) سعت (۰، π) کے لئے معلوم ہے اور تفاعل فہ (لا)

[−π ≦ لا ≦ ۰] کی تعیین بالترتیب مساواتوں

فہ (لا) = − ف (−لا)، فہ (لا) = ف (−لا) سے ہوتی ہے۔

فوریئر کا سلسلہ بالعموم یکساں طور پر مستدق ثابت کیا گیا ہے،

مسئلہ ۱ دفعہ ۷۹ کی تھوڑی سی توسیع سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ تفاعل کا تکملہ سلسلہ کو رقم بر رقم تکمل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ لیکن عام طور پر تفاعل کا مشتق ہم سلسلہ کو رقم بر رقم تفرق کرنے سے حاصل نہیں کرتے۔ سلسلہ کے تفرق کے موضوع پر [Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol 12] کے ایک مضمون کا حوالہ دیا جاتا ہے۔

ایک اور امر کا یہاں ذکر کر دیا جائے۔ اگر ف(لا) موڑ کی قیمت کے نزدیک ہو تو ثبوت دفعہ ۸۰ بلحاظ یکساں استدقاق ناقابل اطلاق معلوم دیگا۔ مگر یہ مشکل بآسانی رفع ہو سکتی ہے، فرض کرو کہ ف(ج) مثلاً قیمت اعظم ہے، تو ان دو متصل اقل قیمتوں کے درمیان جن کے بیچ میں ف(ج) واقع ہوتی ہے ہم ف(لا) کو اس شکل ف۱(لا) + سا۱(لا) میں رکھ سکتے ہیں جہاں

ف۱(لا) = ف(لا)، سا۱(لا) = ۰ جبکہ لا ≦ ج

ف۱(لا) = ف(ج)، سا۱(لا) = ف(لا) − ف(ج) جبکہ لا ≧ ج

صریحاً ف۱(لا) گھٹنے والا تفاعل نہیں ہے اور سا۱(لا) بڑھنے والا تفاعل نہیں ہے پس اوسط قیمت کا مسئلہ ہر صورت میں لگ سکتا ہے۔ پس موڑ کی قیمتوں کی وہی نوعیت ہے جو تفاعل کی عام قیمتوں کی (ملاحظہ ہو اوپر کی دفعہ جس کا ابھی حوالہ دیا گیا)۔

۸۳۔ مثالیں۔ اب ہم چند مثالیں حل کرینگے، نقاط عدم تسلسل کے لئے طالب علم ہمیشہ سلسلہ کی قیمتوں کی خاص جانچ کرے۔

مثال ۱۔ ف(لا) کے لئے جیب کا سلسلہ دریافت کرو جبکہ ف(لا) = لا، لا = ۰ سے لا = $\frac{\pi}{2}$ تک اور ف(لا) = π − لا، لا = $\frac{\pi}{2}$ سے لا = π تک۔

ف(لا) کی ترسیم ایک ٹوٹا خط مستقیم ہے۔ ب~ن~ حاصل کرنیکے لئے

$\frac{\pi}{2}$ ب~ن~ = $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ لا جب ن لا ء لا + $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ (π − لا) جب ن لا ء لا = $\frac{2}{ن^2}$ جب $\frac{ن\pi}{2}$

اسلئے ف(لا) = $\frac{4}{\pi}$ ($\frac{\text{جب لا}}{1^2}$ − $\frac{\text{جب ۳لا}}{3^2}$ + $\frac{\text{جب ۵لا}}{5^2}$ − $\frac{\text{جب ۷لا}}{7^2}$ + ...)

طالب علم سلسلہ کی پہلی چند رقمیں مرتسم کرے شلاً پہلی چار اور دیکھے کہ تقریب کی نوعیت ایک شکستہ خط ہے۔

ہر لا کے لئے سلسلہ ایک مسلسل تفاعل ہے۔

مثال ۲۔ مثال ۱ کے تفاعل کے لئے جیب التمام سلسلہ حاصل کرو۔

اس صورت میں $\text{ا}_{\text{۰}} = \frac{\pi}{\text{۴}}$ ، $\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{\text{۴ جم}\frac{\text{ن}\pi}{\text{۲}}\left(\text{۱} - \text{جم}\frac{\text{ن}\pi}{\text{۲}}\right)}{\text{ن}^{\text{۲}}\pi}$

اور $\text{ف(لا)} = \frac{\pi}{\text{۴}} - \frac{\text{۸}}{\pi}\left(\frac{\text{جم ۲ لا}}{\text{۲}^{\text{۲}}} + \frac{\text{جم ۶ لا}}{\text{۶}^{\text{۲}}} + \frac{\text{جم ۱۰ لا}}{\text{۱۰}^{\text{۲}}} + \ldots\ldots\right)$

ہر لا کے لئے سلسلہ ایک مسلسل تفاعل ہے۔

مثال ۳۔ تفاعل $\text{ف(لا)} = \text{۱}$ کے لئے (۱) جیب کا سلسلہ (۲) جیب التمام کا سلسلہ دریافت کرو۔

(۱) $\text{ف(لا)} = \frac{\text{۴}}{\pi}\left(\frac{\text{جب لا}}{\text{۱}} + \frac{\text{جب ۳ لا}}{\text{۳}} + \frac{\text{جب ۵ لا}}{\text{۵}} + \ldots\ldots\right)$

(۲) $\text{ف(لا)} = \text{۱}$

طالب علم اسکی توجیہ کرے کہ جیب التمام کا سلسلہ صرف رقم مطلق میں آکے تحویل کیوں ہو جاتا ہے۔ (۱) میں جواز کی سعت $\text{۰} < \text{لا} < \pi$ ہے۔

مثال ۴۔ ف(لا) کے لئے ایک جیب کا سلسلہ دریافت کرو جبکہ $\text{ف(لا)} = \text{لا}$ ، $\text{لا} = \text{۰}$ سے $\text{لا} = \text{ما}$ تک اور $\text{ف(لا)} = \text{ما}$ ، $\text{لا} = \text{ما}$ سے $\text{لا} = \pi - \text{ما}$ تک اور $\text{ف(لا)} = \pi - \text{لا}$ ، $\text{لا} = \pi - \text{ما}$ سے $\text{لا} = \pi$ تک

$$\frac{\pi}{\text{۲}}\,\text{ب}_{\text{ن}} = \int_{\text{۰}}^{\text{ما}} \text{لا جب ن لا د لا} + \int_{\text{ما}}^{\pi - \text{ما}} \text{ما جب ن لا د لا}$$

$$+ \int_{\pi - \text{ما}}^{\pi} (\pi - \text{لا})\,\text{جب ن لا د لا}$$

$$\text{ب}_{\text{ن}} = \text{۲}\,(\text{۱} - \text{جم ن}\pi)\,\text{جب ن ما} / \text{ن}^{\text{۲}}\pi$$

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{۴}{\pi}\left(\frac{\text{جب لا جب ما}}{۱^۲} + \frac{\text{جب ۳لا جب ۳ما}}{۳^۲} + \frac{\text{جب ۵لا جب ۵ما}}{۵^۲} + \dots\right)$$

مثال ۵ - $\text{ر لا} - \text{لا}^۲$ کے لئے لا = ۰ سے لا = ر تک جیب التمام کا سلسلہ دریافت کرو۔

اس صورت میں سلسلہ کی شکل یہ ہے

$$\text{ر لا} - \text{لا}^۲ = \text{ا}_۰ + \sum \text{ا}_\text{ن} \,\text{جم}\, \frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ر}}$$

۰ سے ر تک تکمل کرو، تب $\text{ا}_۰ = \frac{\text{ر}^۲}{۶}$

$\text{جم}\,\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ر}}$ کے ساتھ ضرب دو اور ۰ سے ر تک تکمل کرو، تب

$$\text{ا}_\text{ن} = -۲\,(۱ + \text{جم ن}\,\pi)\,\text{ر}^۲/\text{ن}^۲\pi^۲$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر لا} - \text{لا}^۲ = \frac{\text{ر}^۲}{۶} - \frac{۴\text{ر}^۲}{\pi^۲}\left(\frac{۱}{۲^۲}\,\text{جم}\,\frac{۲\pi\,\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{۱}{۴^۲}\,\text{جم}\,\frac{۴\pi\,\text{لا}}{\text{ر}} + \dots\right)$$

یہ پھیلاؤ جائز ہے $۰ \leqq \text{لا} \leqq \text{ر}$ کے لئے۔ وسعت $-\text{ر} \leqq \text{لا} \leqq ۰$ کے لئے سلسلہ $-\text{ر لا} - \text{لا}^۲$ کو تعبیر کرتا ہے۔

رکھو ر = ۲ج اور ہر رکن سے $\text{ج}^۲$ تفریق کرو۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ج} - \text{لا})^۲ = \frac{\text{ج}^۲}{۳} + \frac{۴\text{ج}^۲}{\pi^۲}\left(\text{جم}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ج}} + \frac{۱}{۲^۲}\,\text{جم}\,\frac{۲\pi\,\text{لا}}{\text{ج}} + \frac{۱}{۳^۲}\,\text{جم}\,\frac{۳\pi\,\text{لا}}{\text{ج}} + \dots\right)$$

جائز ہے $۰ \leqq \text{لا} \leqq ۲\text{ج}$ کے لئے۔

۴۸ - چند معیاری سلسلے - اب ہم چند مشہور پھیلاؤ حاصل کرینگے انہیں بالعموم بلاواسطہ اعمال سے ثابت کیا جاتا ہے تاہم مضمون زیر بحث کی

ان سے دلچسپ توضیح ہوتی ہے۔

مثال ا۔ جم پ لا کے لئے ایک جیب التام سلسلہ حاصل کرو جہاں پ نہ تو صفر ہے اور نہ ہی یہ صحیح عدد ہے۔

$$\text{ا}=\frac{\text{جب پ}\,\pi}{\text{پ}\,\pi}\ ,\quad \text{ا}_{\text{ن}}=(-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{۲\,\text{پ جب پ}\,\pi}{(\text{ن}^۲-\text{پ}^۲)\,\pi}$$

$$\text{جم پ لا}=\frac{\text{جب پ}\,\pi}{\text{پ}\,\pi}+\frac{۲\,\text{پ جب پ}\,\pi}{\pi}\sum_{\text{ن}=۱}^{\infty}(-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{\text{جم ن لا}}{\text{ن}^۲-\text{پ}^۲}\ \ldots\ldots(۱)$$

یہ پھیلاؤ درست ہے۔ $۰ \leqq \text{لا} \leqq \pi$ کے لئے، لیکن چونکہ جم پ لا جفت تفاعل ہے، اس لئے یہ پھیلاؤ وسعت $-\pi \leqq \text{لا} \leqq \pi$ کے لئے بھی جائز ہے۔

(۱) میں رکھو لا = ۰، اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi}{\text{جب پ}\,\pi}=\frac{۱}{\text{پ}}+\sum_{\text{ن}=۱}^{\infty}(-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{۲\,\text{پ}}{\text{ن}^۲-\text{پ}^۲}$$

$$=\sum_{\text{ن}=۰}^{\infty}(-۱)^{\text{ن}}\left(\frac{۱}{\text{ن}+\text{پ}}+\frac{۱}{\text{ن}+۱-\text{پ}}\right)\ \ldots\ldots(۲)$$

(۲) میں پ π کی بجائے ی رکھو تب ی صفر نہیں ہے اور نہ ہی یہ π کا ضعف ہے۔ اس طرح

$$\frac{۱}{\text{جب ی}}=\frac{۱}{\text{ی}}+\sum_{\text{ن}=۱}^{\infty}(-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{۲\,\text{ی}}{\text{ن}^۲\pi^۲-\text{ی}^۲}$$

$$=\sum_{\text{ن}=۰}^{\infty}(-۱)^{\text{ن}}\left(\frac{۱}{\text{ن}\pi+\text{ی}}+\frac{۱}{(\text{ن}+۱)\pi-\text{ی}}\right)\ \ldots\ldots(۳)$$

(۳) میں رکھو ی کی بجائے $\frac{\pi}{۲}-\text{ی}$، تب اگر ی، $\frac{\pi}{۲}$ کا طاق ضعف نہ ہو تو ملیگا

$$\frac{۱}{\text{جم ی}}=۴\sum_{\text{ن}=۱}^{\infty}(-۱)^{\text{ن}-۱}\frac{(۲\text{ن}-۱)\pi}{(۲\text{ن}-۱)^۲\pi^۲-۴\text{ی}^۲}\ \ldots\ldots\ldots(۴)$$

پھر (۱) میں رکھو لا = π اور حاصل ہوگا

$$\pi\,\text{هم}\,\text{پ}\pi = \frac{1}{\text{پ}} - \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{2\text{پ}}{\text{ن}^2-\text{پ}^2} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\text{ن}+\text{پ}} - \frac{1}{\text{ن}+1-\text{پ}}\right) \quad \text{....(۵)}$$

(۵) میں رکھو پπ = ی، اگر ی نہ صفر ہو اور نہ π کا ضعف ہو تو

$$\text{هم ی} = \frac{1}{\text{ی}} - \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{2\text{ی}}{\text{ن}^2\pi^2-\text{ی}^2} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\text{ن}\pi+\text{ی}} - \frac{1}{(\text{ن}+1)\pi-\text{ی}}\right\} \quad \text{....(۶)}$$

(۶) میں ی کے لئے $\frac{\pi}{2}$ - ی رکھو، تب اگر ی، $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضعف نہ ہو تو

$$\text{مس ی} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty}\left\{\frac{2}{(2\text{ن}+1)\pi-2\text{ی}} - \frac{2}{(2\text{ن}+1)\pi+2\text{ی}}\right\} \quad \text{....(۷)}$$

اب (۶) کو اِس شکل میں لکھو

$$\text{هم ی} - \frac{1}{\text{ی}} = -\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{2\text{ی}}{\text{ر}^2\pi^2-\text{ی}^2} - \text{ق}_{\text{ن}}\text{،}\quad \text{ق}_{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=\text{ن}+1}^{\infty} \frac{2\text{ی}}{\text{ر}^2\pi^2-\text{ی}^2}$$

ی = . کے لئے (هم ی - $\frac{1}{\text{ی}}$) کی انتہا صفر ہے، اِس لئے ی = . سے ی = لا < π تک ہم تکمل کر سکتے ہیں، اس لئے

$$\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{لوک}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2\pi^2}\right) - \int_0^{\text{لا}} \text{ق}_{\text{ن}}\,\text{وی} \quad \text{....(۸)}$$

لیکن $\text{ر}^2\pi^2 - \text{ی}^2 > (\text{ر}-1)\,\text{ر}\,\pi^2$، پس

$$\text{ق}_{\text{ن}} < \frac{2\text{ی}}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\text{ن}(\text{ن}+1)} + \frac{1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)} + \cdots\right\} < \frac{2\text{ی}}{\text{ن}\pi^2}$$

$$\text{اور}\quad \int_0^{\text{لا}} \text{ق}_{\text{ن}}\,\text{وی} < \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}\pi^2} = \frac{\text{طا}\,\text{لا}^2}{\text{ن}\pi^2}\text{،}\quad 0 < \text{طا} < 1$$

اب ہم (۱) کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{لوک}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2\,\text{ط}^2}\right) + \text{لوک قو}^{\frac{\text{طہ لا}^2}{\text{ن}\,\text{ط}^2}}$$

اور لوگارتموں سے عددوں کی طرف گذرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2}\right)\left(1-\frac{\text{لا}^2}{2^2\,\text{ط}^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ن}^2\,\text{ط}^2}\right)\text{قو}^{\frac{\text{طہ لا}^2}{\text{ن}\,\text{ط}^2}} \cdots (۸)$$

جب ن لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو جزو ضربی $\text{قو}^{\frac{\text{طہ لا}^2}{\text{ن}\,\text{ط}^2}}$ ایک کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

اس طور پر ہمیں جب لا کے لئے لاتناہی حاصل ضرب حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2}\right)\left(1-\frac{\text{لا}^2}{2^2\,\text{ط}^2}\right)\left(1-\frac{\text{لا}^2}{3^2\,\text{ط}^2}\right)\cdots (۹)$$

اسی طرح (۷) سے جم لا کے لئے لاتناہی حاصل ضرب حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم لا} = \left(1-\frac{4\,\text{لا}^2}{\text{ط}^2}\right)\left(1-\frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\,\text{ط}^2}\right)\left(1-\frac{4\,\text{لا}^2}{5^2\,\text{ط}^2}\right)\cdots\cdots (۱۰)$$

ضابطے (۹) اور (۱۰)، لا کی ہر قیمت کے لئے جائز ہیں اگرچہ ثبوت سے یہ ظاہر نہیں ہوتا۔

مثال ۲ - $\frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{ر لا}} + \text{قو}^{-\text{ر لا}}\right)$ یا جمز ر لا کے لئے جیب التمام سلسلہ حاصل کرو۔

$$\text{ا}_{\circ} = \frac{\text{جمز ر ط}}{\text{ر ط}}\;,\quad \text{ا}_{\text{ن}} = \frac{2\,\text{ر جمز ر ط}}{\text{ط}} \times \frac{\text{جم ن ط}}{\text{ر}^2+\text{ن}^2}$$

اس لئے $-\text{ط} \leqq \text{لا} \leqq \text{ط}$

$$\text{جمز ر لا} = \frac{\text{جمز ر ط}}{\text{ر ط}} + \frac{2\,\text{ر جمز ر ط}}{\text{ط}} \sum_{\text{ن}=1}^{\infty} (-1)^{\text{ن}} \frac{\text{جم ن لا}}{\text{ر}^2+\text{ن}^2} \cdots\cdots (۱)$$

(۱) میں رکھو لا = ۰، تب

$$\frac{\pi}{\text{جنز}\,لا\,\pi} = \frac{1}{لا} + \sum_{ن=1}^{\infty} (-1)^{ن} \frac{2\,لا}{لا^2 + ن^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(۲) میں لا π کے لئے ی رکھو، تب اگر ی صفر نہ ہو تو

$$\frac{1}{\text{جنز}\,ی} = \frac{1}{ی} + \sum_{ن=1}^{\infty} (-1)^{ن} \frac{2\,ی}{ی^2 + ن^2 \pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(۱) میں رکھو لا = π

$$\pi\,\text{حمز}\,لا\,\pi = \frac{1}{لا} + \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{2\,لا}{لا^2 + ن^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

(۴) میں لا π کے لئے ی رکھو، تب ی کے صفر نہ ہونے کی صورت میں

$$\text{حمز}\,ی = \frac{1}{ی} + \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{2\,ی}{ی^2 + ن^2 \pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

نیز $\text{سنز}\,\frac{لا\,\pi}{2} = \text{حمز}\,لا\,\pi - \frac{1}{\text{جنز}\,لا\,\pi}$، اسلئے (۴) اور (۲) سے

$$\frac{\pi}{2}\,\text{سنز}\,\frac{\pi\,لا}{2} = \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{2\,لا}{لا^2 + (2ن-1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

یا لا π = ۲ ی رکھنے سے

$$\text{سنز}\,ی = \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{8\,ی}{4\,ی^2 + (2ن-1)^2 \pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

مثال اسی طرح ہم بآسانی لا متناہی حاصل ضرب کے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں

$$\text{جنز}\,ی = ی \left(1 + \frac{ی^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{ی^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 + \frac{ی^2}{3^2 \pi^2}\right) \ldots\ldots$$

$$\text{جمز}\,ی = \left(1 + \frac{4\,ی^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{4\,ی^2}{3^2 \pi^2}\right) \left(1 + \frac{4\,ی^2}{5^2 \pi^2}\right) \ldots\ldots$$

۸۵ – فوریر کا دوہرا تکملہ ۔ دفعہ ۷۸ میں فرض کرو کہ فا (لا)

ایک ایسا تفاعل ف (لا + و) ہے جو دفعہ ۲۰۷ کے شرائط کو پورا کرتا ہے، اس صورت میں دفعہ ۲۰۸ کے تکملہ (۱) کی اوپر کی حد $\frac{1}{2}$ (π - لا) کی بجائے ہم کوئی عدد ب لے سکتے ہیں جو ا سے بڑا ہو۔ اس طرح ہمیں ذیل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{م \to \infty} \int_{ا}^{ب} \text{ف (لا + و)} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\, \text{د و} = ٠ \quad \text{اگر ب > ا > ٠}$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \text{ف (لا + ٠)} \quad \text{اگر ب > ا = ٠} \qquad (۱)$$

اسی طرح دفعہ ۲۰۷ کے (۶) کے مماثل ذیل کا نتیجہ ہے

$$\text{نہا}_{م \to \infty} \int_{ا'}^{ب'} \text{ف (لا - ع)} \frac{\text{جب م ع}}{\text{ع}}\, \text{د ع} = ٠\text{، اگر ب' > ا' > ٠}$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \text{ف (لا - ٠)} \quad \text{اگر ب' > ا' = ٠} \qquad (۲)$$

(۲) میں فرض کرو کہ ع = - و، ا' = ب، ب' = ا یعنی ا اور ب منفی ہیں اور ا جبریہ طور پر ب سے کم ہے، تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{م \to \infty} \int_{ا}^{ب} \text{ف (لا + و)} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\, \text{د و} = ٠ \quad \text{اگر ا < ب < ٠}$$

$$= \frac{\pi}{2}\, \text{ف (لا - ٠)} \quad \text{اگر ا < ب = ٠} \qquad (۳)$$

(۱) اور (۳) کو ایک ضابطہ میں اکٹھا کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\text{نہا}_{م \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{ا}^{ب} \text{ف (لا + و)} \frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\, \text{د و} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

مساوی ہے $\frac{1}{2}$ {ف (لا + ٠) + ف (لا - ٠)} کے اگر ب > ٠ > ا

مساوی ہے $\frac{1}{2}$ ف (لا + ٠) کے اگر ب > ا = ٠

مساوی ہے $\frac{1}{2}$ ف (لا - ٠) کے اگر ٠ = ب > ا

مساوی ہے صفر کے اگر ب > ا > ٠

یا اگر ۰ > ب > ا

اگر تکملہ (۴) میں ب مثبت ہو اور ا منفی تو انتہا بدلنے کے بغیر ہم ب کی بجائے کوئی اس سے بڑا عدد ب' اور ا کی بجائے کوئی (جبری طور پر) اس سے چھوٹا عدد ا' لے سکتے ہیں کیونکہ مذکورہ انتہا صفر ہوتی ہے جبکہ تکملے کے حدود ب، ب' ہوں یا ا'، ا۔
اگر یہ مان لیا جائے کہ تکملے کے اوپر کی حد + ∞ تک اور نیچے کی − ∞ تک دیگر لیجائی جا سکتی ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\text{ف}(\text{لا}+\text{و})\,\frac{\text{جب م و}}{\text{و}}\,\text{ذو}=\frac{1}{2}\left\{\text{ف}(\text{لا}+0)+\text{ف}(\text{لا}-0)\right\}$$

یا لا + و کی بجائے عہ درج کرنے سے

$$\text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\text{ف}(\text{عہ})\,\frac{\text{جب م}(\text{عہ}-\text{لا})}{\text{عہ}-\text{لا}}\,\text{ذعہ}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\text{ف}(\text{لا}+0)+\text{ف}(\text{لا}-0)\right\}\ \ldots\ldots(5)$$

لیکن $\frac{\text{جب م}(\text{عہ}-\text{لا})}{\text{عہ}-\text{لا}}=\int_{0}^{\text{م}}\text{جم بہ}(\text{عہ}-\text{لا})\,\text{ذبہ}$

اس لئے (۵) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\left\{\text{ف}(\text{لا}+0)+\text{ف}(\text{لا}-0)\right\}=\text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\text{ف}(\text{عہ})\,\text{ذعہ}\int_{0}^{\text{م}}\text{جم بہ}(\text{عہ}-\text{لا})\,\text{ذبہ}$$

$$=\text{نہا}_{\text{م}\to\infty}\ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\text{م}}\text{ذبہ}\int_{-\infty}^{\infty}\text{ف}(\text{عہ})\,\text{جم بہ}(\text{عہ}-\text{لا})\,\text{ذعہ}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\text{ذبہ}\int_{-\infty}^{\infty}\text{ف}(\text{عہ})\,\text{جم بہ}(\text{عہ}-\text{لا})\,\text{ذعہ}\ \ldots(6)$$

بشرطیکہ مختلف استحالے جائز ہوں۔ جواز پر بحث کرنے کی یہاں گنجائش نہیں لیکن طالب علم کے لئے یہ ثابت کرنے میں زیادہ دقت نہیں ہوگی کہ ضابطہ (۶) درست رہتا ہے اگر ان قیود کے علاوہ جو اس سے قبل ف(لا) پر لگائی گئی ہیں تفاعل ایسا ہو کہ تکملہ

$$\int \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{لا}}\, \text{د}\,\text{لا}$$

مطلق طور پر مستدق ہو جیسے لا، ∞ یا -∞ کی طرف مائل ہو۔
تکملہ (۶) فوریئے کا دوہرا تکملہ کہلاتا ہے، جب ف(لا) مسلسل ہو تو تکملہ کی قیمت ف(لا) ہوتی ہے۔
ذیل کی خاص صورتیں آسانی سے حاصل ہوتی ہیں۔
اگر ف(-لا) = ف(لا) تو لا > ۰ کی صورت میں

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \text{جب لا به فر به} \int_0^\infty \text{ف(عا) جب عا به فرعا} \quad \dots(7)$$

لیکن اگر ف(-لا) = ف(لا) تو لا ≥ ۰ کی صورت میں

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \text{جم لا به فر به} \int_0^\infty \text{ف(عا) جم عا به فرعا} \quad \dots(8)$$

نقطہ عدم تسلسل پر قیمت کے متعلق حسب معمول قرارداد کے موافق۔

مثال۔ مساوات $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2}$ کا ایک ایسا حل معلوم کرو جو جائز ہو ت > ۰، لا > ۰ کے لئے اور ایسا کہ و = ۰ جبکہ لا = ۰ اور و = ف(لا) جبکہ ت = ۰، لا > ۰۔

اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ $\text{و}_{\text{به}} = \text{ق}^{\text{کہ به}^2\text{ت}}\,\text{جب لا به}$ تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے خواہ به کی کچھ ہی قیمت ہو، نیز اس شکل $\sum$ (ق$_{\text{به}}$ × به کا تفاعل) کا ہر جملہ مساوات کو پورا کرے گا۔
پس یہ معلوم ہوگا کہ

$$\text{و} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \text{ق}^{\text{کہ به}^2\text{ت}}\,\text{جب لا به فر به} \int_0^\infty \text{ف(عا) جب عا به فرعا}$$

تمام شرائط کو پورا کرتا ہے۔ یہ مساوات کو پورا کرتا ہے کیونکہ یہ اس شکل

حج (جیب x ہ جیب م ہ کا تفاعل) کا ہے، یہ تکملہ صفر ہے، جبکہ لا = ۰ اور تکملہ مساوی ہے ف (لا) کے جبکہ ت = ۰، لا > ۰ اوپر کی مساوات (۶) کی رو سے۔

۸۶۔ **آزمائشی تفاعل**۔ عملی صورتوں میں یہ سوال اکثر واقع ہوتا ہے کہ کسی آزمائشی یا تجربائی تفاعل کو فوریر سیریز کے سلسلے سے تعبیر کیا جائے۔ طالب علم کو اگر اس کے حل کا موقع پیش آئے تو ترسیمی حل کا خاکہ اسے مصنف کی کتاب ترسیمات کا رسالہ (Treatise on Graphs) صفحات ۱۳۹۔۱۴۲ اور تحلیلی حل مصنف کی کتاب تمہید احصا (Introduction to the Calculus) صفحات ۱۲۰ تا ۱۲۹ میں ملے گا۔ تحلیلی طریق کی مفصل بحث کے لئے ملاحظہ ہوں پروفیسر رنگ (C. Runge) کے مضامین

(Zeitschrift für Mathematik und Physik)

جلد ۴۸ صفحات ۴۴۳ تا ۴۵۶ اور جلد ۵۲ صفحات ۱۱۷ تا ۱۲۳ میں، نیز (Elektrotechnische Zeitschrift 1905 (Heft 11) میں۔

۸۷۔ **حوالے**۔ فوریر کے سلسلوں کا علم بہت وسیع ہے، زیادہ مشہور مکتوبات کا مختصر بیان

(Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol 1)

کے ایک مضمون میں ملیگا۔ اگر طالب علم خود فوریر کا وقت خیز رسالہ

(Théorie Analytique de la Chaleur)

(Edited by G. Darboux. paris: Gauthier-villars)

اس کا انگریزی ترجمہ اے، فری مین (کیمبرج، یونیورسٹی پریس) نے کیا ہے۔ اس مضمون پر ایک نہایت عمدہ کتاب ڈبلیو، ای، بائرلے کی ہے (بوسٹن، یو، ایس، اے۔ جن کمپنی)۔

An Elementary Treatise on Fourier Series and

Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics

اِس کتاب میں ریاضی طبعیات کے مسائل کی کئی عددی توضیحات ہیں۔

مشق ۲۰

امثلہ ۱ تا ۱۱ کے تفاعلوں کے لئے فوریر کے سلسلے معلوم کرو۔

۱۔ ف(لا) = -۱، لا = -π سے لا = ۰ تک اور ف(لا) = ۱، لا = ۰ سے لا = π تک۔

۲۔ ف(لا) = ج، لا = -۱ سے لا = ۰ تک اور ف(لا) = ج، لا = ۰ سے لا = ۱ تک۔

۳۔ ف(لا) = π + لا، لا = -π سے لا = -π/۲ تک، ف(لا) = π/۲، لا = -π/۲ سے لا = π/۲ تک

اور ف(لا) = π - لا، لا = π/۲ سے لا = π تک۔

۴۔ سب کچھ وہی جو اوپر مثال ۳ میں لیکن ہر جگہ π کی بجائے ۱۔

۵۔ ف(لا) = ۱ - لا، لا = -۱ سے لا = ۰ تک اور ف(لا) = ۱ + لا، لا = ۰ سے

لا = ۱ تک۔

۶۔ ف(لا) = ج لا، لا = ۰ سے لا = ۱ تک اور ف(لا) = ۰، لا = ۱ سے

لا = ۲ ۱ تک۔

۷۔ جب لا کے لئے جیب التمام سلسلہ۔

۸۔ ف(لا) کے لئے جیب التمام سلسلہ جبکہ ف(لا) = ۱/۴ - لا، لا = ۰ سے

لا = ۱/۲ تک اور ف(لا) = ۰، لا = ۱/۲ سے لا = ۱ تک۔

۹۔ (π - لا) جب لا کے لئے جیب التمام سلسلہ

۱۰۔ ف(لا) کے لئے جیب سلسلہ جبکہ ف(لا) = ب لا/۱، لا = ۰ سے

لا = ۱ تک اور ف(لا) = ب(ج - لا)/(ج - ۱)، لا = ۱ سے لا = ج تک۔

۱۱۔ اگر ف(لا) مسلسل ہو لا = -π سے لا = π تک اور اگر

ف(-π) = ف(π) تو ثابت کرو کہ ف(لا) کا مشتق ف'(لا) کے

فوریئے کے سلسلہ کو تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے

۱۲- $\text{و}^{\text{لا}}$ کے (۱) جیب التمام سلسلہ (۲) جیب سلسلہ حاصل کرو۔ اس کا معائنہ کرو کہ کیا ہر ایک سلسلہ دوسرے سلسلہ سے تفرق یا تکمل سے حاصل ہو سکتا ہے یا نہیں۔

۱۳- اگر ف (لا)، لا کا جفت تفاعل ہو تو ثابت کرو کہ ف (لا) پر بعض قیود کے ماتحت

$$\text{ف}(\text{لا}) + \text{ف}(\text{لا} + ۲\,\text{ل}) + \text{ف}(\text{لا} + ۴\,\text{ل}) + \ldots\ldots$$
$$+ \text{ف}(\text{لا} - ۲\,\text{ل}) + \text{ف}(\text{لا} - ۴\,\text{ل}) + \ldots\ldots$$

یعنی $\sum_{\text{ر}=-\infty}^{\text{ر}=\infty} \text{ف}(\text{لا} + ۲\,\text{ر}\,\text{ل})$

ایک سلسلہ $\text{ا}_۰ + \sum_{\text{ن}=۱}^{\infty} \text{ا}_\text{ن}\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}$ سے تعبیر ہو سکتا ہے جہاں

$$\text{ا}_۰ = \frac{۱}{\text{ل}} \int_۰^{\infty} \text{ف}(\text{ع})\,\text{و ع}, \quad \text{ا}_\text{ن} = \frac{۲}{\text{ل}} \int_۰^{\infty} \text{ف}(\text{ع})\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{ع}}{\text{ل}}\,\text{و ع}$$

[ملاحظہ ہوں جوابات]

۱۴- مثال ۱۳ کے مسئلہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ

(۱) $$\sum_{\text{ن}=-\infty}^{\text{ن}=\infty} \text{و}^{-\frac{(\text{لا}+۲\text{ن}\text{ل})^۲}{\text{ج}}} = \frac{\sqrt{\pi\,\text{ج}}}{۲\,\text{ل}} \left\{ ۱ + ۲ \sum_{\text{ن}=۱}^{\infty} \text{و}^{-\frac{\text{ن}^۲\pi^۲\text{ج}}{\text{ل}^۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} \right\}$$

(۲) $$\sum_{\text{ن}=-\infty}^{\text{ن}=\infty} (-۱)^\text{ن}\,\text{و}^{-\frac{(\text{لا}+۲\text{ن}\text{ل})^۲}{\text{ج}}} = \frac{\sqrt{\pi\,\text{ج}}}{\text{ل}} \sum_{\text{ن}=۰}^{\infty} \text{و}^{-\frac{(۲\text{ن}+۱)^۲\pi^۲}{۴\,\text{ل}^۲}\times\frac{\text{ج}}{۴}}\,\text{جم}\,\frac{(۲\text{ن}+۱)\,\pi\,\text{لا}}{۲\,\text{ل}}$$

۱۵- اگر ف (لا) دوری تفاعل ہو جس کا دور ۲ π ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^\infty فا(لا)\,ف(لا)\,ءلا = \int_0^{2\pi} ف(لا)\{فا(لا)+فا(لا+2\pi)+فا(لا+4\pi)+\dots\}\,ءلا$$

[شلوملش]

۱۶۔ اگر مثال ۱۵ میں $ف(لا) = \frac{1}{2}(\pi - لا)$ تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^\infty فا(لا)\left\{\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{جب\, ن لا}{ن}\right\} ءلا = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\pi-لا)\left\{\sum_{ن=0}^{\infty} فا(لا+2ن\pi)\right\} ءلا$$

$فا(لا) = و^{-لہ لا}$ رکھنے سے حاصل کرو کہ

$$\frac{1}{لہ} + \sum_{ن=1}^{\infty} \frac{2\,لہ}{لہ^2+ن^2} = \pi\,\frac{و^{لہ\pi}+و^{-لہ\pi}}{و^{لہ\pi}-و^{-لہ\pi}} = \pi\ همز\ لہ\pi$$

$فا(لا)$ کے لئے قیمتیں $و^{-لہ لا}$ جم مہ لا، $و^{-لہ لا}$ جب مہ لا رکھنے سے دلچسپ سلسلے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۷۔ مثال ۱۴ (۱) سے حاصل کرو کہ

$$1+2\sum_{ن=1}^{\infty} و^{-ن^2 ر^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{ر}\left\{1+2\sum_{ن=1}^{\infty} و^{-\frac{ن^2\pi^2}{ر^2}}\right\}$$

ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} + \frac{1000}{1001} + \left(\frac{1000}{1001}\right)^4 + \left(\frac{1000}{1001}\right)^9 + \dots\dots$

مساوی ہے ۲۸،۰۳۱۹۶..... کے [شلوملش]

۱۸۔ دفعہ ۸۵ کی مساواتوں (۷)، (۸) میں رکھو $ف(لا) = و^{-م لا}$ $(م > 0)$

اور یہ قیمتیں حاصل کرو

$$\int_0^\infty \frac{بہ\ جب\ لا\ بہ\ ءبہ}{م^2+بہ^2} = \frac{\pi}{2}\,و^{-م لا},\quad (لا > 0)$$

$$\int_0^\infty \frac{جم\, لا\, بہ\, د بہ}{م^2 + بہ^2} = \frac{\pi}{2\, م}\, ق^{-م\, لا}, \quad لا \geq 0 .$$

۱۹- دفعہ ۸۵ کے تکملوں (۷)، (۸) کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$\int_0^\infty \frac{جب\, لا}{\sqrt{لا}}\, د لا = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \frac{جم\, لا}{\sqrt{لا}}\, د لا$$

فرض کرو $\left[ف(عہ) = \frac{1}{\sqrt{عہ}} \right]$

۲۰- اگر $\int_0^\infty ف(عہ)\, جم\, لا\, عہ\, د عہ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, فہ(لا)$

تب $\int_0^\infty فہ(عہ)\, جم\, لا\, عہ\, د عہ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, ف(لا)$

اس کے مماثل اور رشتہ ہوگا جبکہ تکمل میں جم لا عہ کی بجائے جب لا عہ ہو۔

۲۱- اگر ن > ۱ اور لا ≥ ۰۔ یا اگر ن = ۱ اور لا > ۰۔
تو ثابت کرو کہ

(۱) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} جب\, ن\, طہ\, جب(لا\, مس\, طہ)\, جم^{ن-2}\, طہ\, د طہ = \frac{\pi}{2\, جا(ن)}\, ق^{-لا}\, لا^{ن-1}$$

(۲) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} جم\, ن\, طہ\, جم(لا\, مس\, طہ)\, جم^{ن-2}\, طہ\, د طہ = \frac{\pi}{2\, جا(ن)}\, ق^{-لا}\, لا^{ن-1}$$

دفعہ ۲۷ مثال ۷ اور دفعہ ۸۵ نتائج (۷)، (۸) استعمال کرو۔

۲۲- مثال ۲۱ کے نتیجے استعمال کر کے ثابت کرو کہ اگر م > ۱ تو

(۱) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} جب\, م\, طہ\, جب\, ن\, طہ\, جم^{م+ن-2}\, طہ\, د طہ = \frac{\pi}{2^{م+ن}} \cdot \frac{جا(م+ن-1)}{جا(م)\, جا(ن)}$$

(۲) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} جم\, م\, طہ\, جم\, ن\, طہ\, جم^{م+ن-2}\, طہ\, د طہ = \frac{\pi}{2^{م+ن}} \cdot \frac{جا(م+ن-1)}{جا(م)\, جا(ن)}$$

[مثال ۲۱ میں مساواتوں کے دونوں رکنوں کو قوٰ^لا لا^{م-۱} کے ساتھ ضرب دو اور بلحاظ لا کے ۰ سے ∞ تک تکمل کرو۔]

۲۳۔ مثال ۲۲ سے حاصل کرو

(۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جم (م - ن) طہ جم^{م+ن-۲} طہ وطہ = $\frac{\pi}{۲^{م+ن-۱}}$ · $\frac{\text{جا (م + ن - ۱)}}{\text{جا (م) جا (ن)}}$

(۲) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جم پ طہ جم^{پ} طہ وطہ = $\frac{\pi}{۲^{پ+۱}}$

(۳) جا (پ) جا (۱ - پ) = $\frac{\pi}{\text{جب پ } \pi}$

[مساوات (۱) اور مثال (۲۲) کی مساواتیں (۱) اور (۲) برقرار رہتی ہیں جب تک کہ م، ن، م + ن - ۱ سب مثبت ہوں، مساوات (۲) قائم رہتی ہے اگر پ + ۱ مثبت ہو]

۲۴۔ اگر م > ۱ اور ۱ > ن > ۰ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جم م طہ جم^{م-ن-۱} طہ جب^{ن-۱} طہ وطہ = $\frac{\text{جا (ن) جا (م - ن)}}{\text{جا (م)}}$ جم $\frac{ن\pi}{۲}$

(۲) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب م طہ جم^{م-ن-۱} طہ جب^{ن-۱} طہ وطہ = $\frac{\text{جا (ن) جا (م - ن)}}{\text{جا (م)}}$ جب $\frac{ن\pi}{۲}$

اور ن ← ۱ کے لئے انتہا لینے سے ثابت کرو کہ (م > ۱)

(۳) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جم م طہ جم^{م-۲} طہ وطہ = ۰

(۴) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ جب م طہ جم^{م-۲} طہ وطہ = $\frac{۱}{م - ۱}$

۲۵- ف (لا) پر انہی قیود کے ہوتے ہوئے جو ف (لا) پر عائد کی گئی ہیں ثابت کرو کہ اگر $-\pi < \text{لا} < \pi$

$$\text{نہا}_{\text{ر}\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\text{ر}^2)\,\text{ف}(\text{و})\,\text{ءو}}{1-2\text{ر}\,\text{جم}(\text{و}-\text{لا})+\text{ر}^2} = \pi\left\{\text{ف}(\text{لا}+0)+\text{ف}(\text{لا}-0)\right\}$$

اور

$$\text{نہا}_{\text{صہ}\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{صہ}}{\text{صہ}^2+(\text{و}-\text{لا})^2}\,\text{ف}(\text{و})\,\text{ءو} = \frac{\pi}{2}\left\{\text{ف}(\text{لا}+0)+\text{ف}(\text{لا}-0)\right\}$$

جہاں صہ مثبت قیمتوں میں سے ہو کر صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

[ملاحظہ ہو مشق ۱۲ (۱۳)]

ضمیمہ

تفرقوں پر نوٹ

دفعہ ۹ حصۂ اول میں دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل کے تفرقہ فرع کی یہ تعریف کیگئی ہے کہ یہ مف ع کا صدری حصہ ہے تین غیر تابع متغیروں لا، ما، ی کے لئے مساوات ہے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\text{فری} \qquad \ldots\ldots (۱)$$

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اس صورت میں بھی فرع مساوات (۱) سے تعبیر ہوگا جبکہ متغیر لا، ما، ی غیر تابع ہونے کی بجائے دو یا زیادہ غیر تابع متغیروں کے تفاعل ہوں تمام تفاعیل اور ان کے پہلے جزوی مشتقوں کو مسلسل فرض کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ لا، ما، ی دو غیر تابع متغیروں س، ت کے تفاعل ہیں، اس لئے ع غیر تابع متغیروں س، ت کا تفاعل ہے اور ع کا تفرقہ ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف س}}\,\text{فرس} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت} \qquad \ldots\ldots (۲)$$

اب لا، ما، ی غیر تابع متغیروں س، ت کے تفاعل ہیں، اس لئے ان کے تفرقے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{فرلا} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}}\,\text{فرس} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}$$

$$\text{فرما} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}}\,\text{فرس} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت} \qquad \ldots\ldots (۳)$$

$$\text{فری} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف س}}\,\text{فرس} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}$$

لیکن دفعہ ۹ حصۂ اول کی مساواتوں (ب) سے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف س}}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف س}}$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ت}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}$$

$\frac{\text{فرع}}{\text{فرس}}$ کی بجائے ترقیم $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف س}}$ کے استعمال کے متعلق ملاحظہ ہو صفحہ ۳۵۹ حصۂ اول کے وسط میں اس امر کا ذکر۔

پہلی مساوات کو فرس کے ساتھ، دوسری کو فرت کے ساتھ ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف س}}\,\text{فرس}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}}\,\text{فرس}+\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}\right)$$

$$+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}}\,\text{فرس}+\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}\right)+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف س}}\,\text{فرس}+\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}\,\text{فرت}\right)$$

$$=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\text{فری}\quad\ldots\ldots\ldots(۴)$$

مساواتوں (۳) کو استعمال کرنے سے۔

مساواتوں (۲) اور (۴) کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{فرع}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{ورما}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\,\text{فری}$$

پس معلوم ہوا کہ فرع کے لئے جملہ، فرلا، فرما، فری کی رقوم میں اسی شکل کا ہے جیسا کہ لا، ما، ی کے غیر تابع ہونے کی صورت میں۔ ظاہر ہے کہ ثبوت قائم رہتا ہے خواہ کسی ایک جٹ لا، ما، ی یا س، ت کے متغیروں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

دفعہ ۹۸ حصۂ اول میں ایک غیر تابع متغیر لا کے تفاعل ما یا ف (لا) کی تعریف ف″ (لا) فرلا^۲ کی گئی ہے، اس صورت میں فر^۲ لا صفر ہے یا

فر لا مستقل ہے لیکن اگر ایک اور متغیر مثلاً ت متغیر متبوع ہو یعنی ما، لا کا تفاعل ہو جبکہ لا، ت کا تفاعل ہو تو فر۲ لا صفر نہیں ہوگا بلکہ

فر۲ لا = لا̈ فرت۲ ، فر۲ ما = ما̈ فرت۲

جہاں نقطوں سے تفرق بلحاظ ت کے تعبیر ہوتا ہے۔

لیکن ما̈ = فً (لا) (لا̇)۲ + فَ (لا) لا̈

پس ما̈ فرت۲ = فً (لا) (لا̇ فرت)۲ + فَ (لا) لا̈ فرت۲

یا فر۲ ما = فً (لا) فر لا۲ + فَ (لا) فر۲ لا .... (۵)

پس فر۲ ما کے لئے جو جملہ ہے اُس کی شکل اب وہی نہیں ہے جو کہ لا کے متغیر متبوع ہونے کی صورت میں تھی۔

فر ما کی قیمت فَ (لا) فر لا کا تفرقہ لینے سے (۵) حاصل ہو سکتی ہے پس

فر۲ ما = فر (فر ما) = فر لا × فر فَ (لا) + فَ (لا) × فر (فر لا)

= فر لا × فً (لا) فر لا + فَ (لا) فر۲ لا

= فً (لا) فر لا۲ + فَ (لا) فر۲ لا

اسی طرح حاصل ہوتا ہے

فر۳ ما = فر (فر۲ ما) = فًً (لا) فر لا۳ + ۳ فً (لا) فر لا فر۲ لا + فَ (لا) فر۳ لا

دوسرے اور تیسرے تفرقوں کے لئے یہ جملے تحلیلی ہندسہ میں اکثر مطلوب ہوتے ہیں۔ دو یا زیادہ غیر تابع متغیروں کے تفاعل کے اعلیٰ تفرقے ذرا پیچیدہ ہیں۔ اگر

$$\text{فر ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\ \text{فر لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\ \text{فر ما}$$

تو

$$\text{فر}^2\ \text{ع} = \text{فر (فر ع)} = \text{فر لا فر}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right) + \text{فر ما فر}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right)$$

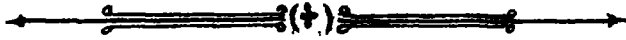
$$= \text{فر لا}\left(\frac{\text{جف}^2\ \text{ع}}{\text{جف لا}^2}\ \text{فر لا} + \frac{\text{جف}^2\ \text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\ \text{فر ما}\right) + \text{فر ما}\left(\frac{\text{جف}^2\ \text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\ \text{فر لا} + \frac{\text{جف}^2\ \text{ع}}{\text{جف ما}^2}\ \text{فر ما}\right)$$

$$= \frac{\text{جف}^2\ \text{ع}}{\text{جف لا}^2}\ \text{فر لا}^2 + 2\ \frac{\text{جف}^2\ \text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\ \text{فر لا فر ما} + \frac{\text{جف}^2\ \text{ع}}{\text{جف ما}^2}\ \text{فر ما}^2 \quad \text{......} (۶)$$

اگر مساوات (۱۱) دفعہ ۸۴ میں ھ، ک، ل کی بجائے بالترتیب ورلا، ورما، وری رکھا جائے اور ف(لا+ھ، ما+ک، ی+ل) - ف(لا، ما، ی) کی بجائے مف ف تو وہ مساوات یوں لکھی جا سکے گی

مف ف = ورف + $\frac{1}{2}$ و۲ف + $\frac{1}{\underline{|3}}$ و۳ف + ...

اگر لا، ما، ی غیر تابع متغیر نہ ہوں تو ورلا، ورما، وری مستقل نہیں ہیں اور و۲ع کے لئے جو جملہ ہوگا اُس کی شکل مندرجہ بالا سے مختلف ہوگی۔ (۶) کے بائیں جانب جو رقمیں ہیں اُن میں ذیل کے جملہ کا اضافہ کرنا ہوگا

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{ و۲لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \text{ و۲ما}$$

جوابات

(احصا حصۂ دوم)

باب اول

دفعہ ۲، صفحہ ۷

۱ـ ۲/۳ لا^۳/۲ ، ۲√لا ، ۲/۳(۳لا-۴)^۳/۲ ، ۲/۳√(۳لا-۴) ، جب^-۱ (لا/√۳)

۲ـ ۲ ، ۰ ، ۱ ، لوک (ب^۲/ل^۲) ، - لوک ۳

مشق ۱ صفحہ ۱۱

۱ـ ۳/۴ لا^۴ + ۵/۳ لا^۳ + ۱۷/۲ لا^۲ + ۵۱ لا + ۱۵۰ لوک (لا - ۳)

۲ـ لا + لوک (۲لا - ۱)   ۳ـ لوک (لا^۲ - ۳لا + ۲)

۴ـ لوک [(لا-۲)(لا-۳) / (لا-۱)^۲]   ۵ـ ۱/(۲√۲۱) لوک [(√۷ + لا√۳) / (√۷ - لا√۳)]

۶ـ ۱/√۲۱ سس^-۱ (لا √(۳/۷))   ۷ـ ۱/۲ جب^-۱ (۲لا/√۳)

۸ـ ۱/۲ لوک (۲لا + √(۴لا^۲ + ۳))   ۹ـ ۱/۲ لا + ۱/۴ جب ۲لا

۱۰ـ ۱/۱۲ جب ۳لا + ۳/۴ جب لا   ۱۱ـ ۱/۲ لا + ۱/۴ب جب ۲(لا + ب)

۱۲ـ ۳/۸ لا - ۱/۴ جب ۲لا + ۱/۳۲ جب ۴لا   ۱۳ـ ۱/۲ جب لا - ۱/۱۴ جب ۷لا

۱۴- ۱/۲ جم (لا+۱) - ۱/۱۴ جم (۷لا+۵)

۱۵- ۱/۴ لا + ۱/۸ جب ۲لا + ۱/۱۶ جب ۴لا + ۱/۲۴ جب ۶لا

۱۶- π/۴ ۱۷- π/۴ ۱۸- π/۸ ۱۹- ۱/۲ لوک ۳

۲۰- ۱/۴ لوک (۳/۵) ۲۱- π/۶ ۲۲- π/۲ ۲۸- (۳) ۲π اب ج/۳

مشق ۲ صفحہ ۲۵

۱- ۲/√۲۳ مس^-۱ ((۴لا+۳)/√۲۳) ۲- جب^-۱ ((۲لا-ا)/ا)

۳- لوک [لا - ۱/۲ ا + √(لا² - الا)] ۴- جب^-۱ ((۲لا-ا-ب)/(ب-ا))

۵- ۱/۲ لوک (ا² + لا²) ۶- √(ا² + لا²)

۷- ۱/۶ لوک ((لا³-۱)/(لا³+۱)) ۸- ۱/√۳ مس^-۱ ((۲لا²+۱)/√۳)

۹- √(لا² + ۲لا - ۳) ۱۰- لوک جب لا ۱۱- لوک (۱+جب لا)

۱۲- لوک (لا+جب لا) ۱۳- ۱/۳ مس³ لا - مس لا + لا

۱۴- - ۱/۴ مم⁴ لا + ۱/۲ مم² لا + لوک جب لا

۱۵- ۱/(اب) مس^-۱ (ب/ا مس لا)

۱۶- -جم لا + جم³ لا - ۳/۵ جم⁵ لا + ۱/۷ جم⁷ لا

۱۷- $-\frac{1}{5}$ جم^۵ لا + $\frac{2}{7}$ جم^۷ لا − $\frac{1}{9}$ جم^۹ لا ۱۸- مس لا − مم لا

۱۹- $\frac{1}{4}$ قط^۴ لا ۲۰- ۲ $\sqrt{ا-لا}$ $\{$ $\frac{1}{5}$ (ا-لا)^۲ − $\frac{1}{3}$ ا (ا-لا) + ا^۲ (ا-لا) $\}$

۲۱- − $\frac{2}{3}$ (لا + ۲ا) $\sqrt{ا-لا}$ ۲۲- لوک (لا + $\sqrt{لا-۱}$) − $\frac{2}{\sqrt{3}}$ مس^۱ ($\frac{۲ \sqrt{لا-۱} + ۱}{\sqrt{3}}$)

۲۳- (۱) $\frac{8}{15}$ (۲) $\frac{8}{315}$ (۳) $\frac{\pi}{اب}$ (۴) $\frac{1}{4}$ لوک ۳

(۵) $\frac{1}{2}$ لوک ۲ (۶) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (۷) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ (۸) $\frac{\pi}{2}$

۲۴- $\frac{1}{2}$ لوک (لا^۲ + لا + ۱) + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ مس^۱ ($\frac{۲لا + ۱}{\sqrt{3}}$)

۲۵- لا − ۲ مس^۱ لا ۲۶- $\frac{1}{3}$ (لا-۱)^۳ + ۲ لوک (لا^۲ + ۲لا + ۳)

۲۷- $\frac{3}{8}$ لوک (لا^۲ − ۲) + $\frac{1}{8}$ لوک (لا^۲ + ۲)

۲۸- لا + ۴ لوک (لا − ۱) − $\frac{2}{لا-۱}$ ۲۹- جب^۱ لا − $\sqrt{۱-لا^۲}$

۳۰- $\sqrt{لا^۲-۱}$ + لوک (لا + $\sqrt{لا^۲-۱}$)

۳۱- $\sqrt{لا^۲ + الا}$ + $\frac{ا}{2}$ لوک (لا + $\frac{1}{2}$ + $\sqrt{لا^۲ + الا}$)

۳۲- $\sqrt{الا - لا^۲}$ + $\frac{ا}{2}$ جب^۱ ($\frac{۲لا - ا}{ا}$)

۳۳- جب^۱ ($\frac{لا-۱}{لا\sqrt{3}}$) ۳۴- $\frac{\sqrt{لا^۲-۱}}{لا+۱}$ ۳۵- − $\frac{\sqrt{لا^۲-۱}}{لا-۱}$

۳۶- − $\sqrt{\frac{۱-لا}{۱+لا}}$ ۳۷- − $\sqrt{\frac{۱+لا}{۱-لا}}$ ۳۸- $\frac{1}{ن}$ لوک ($\frac{لا^ن}{۱+لا^ن}$)

۳۹ـ $\dfrac{\text{۱}+\text{لا}}{\text{۲}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۲لا}+\text{۳}}}$ ۴۰ـ $\tfrac{1}{2}\,\text{لا}+\tfrac{1}{2}\,\text{لوک}\,(\text{جب لا}+\text{جم لا})$

۴۱ـ $\tfrac{3}{5}\,\text{لا}-\tfrac{1}{5}\,\text{لوک}\,(\text{جب لا}+\text{۲ جم لا})$

۴۲ـ (۱) $\dfrac{\pi}{4}$ (۲) $\dfrac{\pi}{2}$ (۳) $\dfrac{\pi}{4}$

(۴) $\dfrac{\pi}{\text{۱}-\text{ر}^{\text{۲}}}$ اگر $\text{ر}^{\text{۲}} < \text{۱}$ اور $\dfrac{\pi}{\text{ر}^{\text{۲}}-\text{۱}}$ اگر $\text{ر}^{\text{۲}} > \text{۱}$

(۵) $\dfrac{\text{عہ}}{\text{جب عہ}}$ (۶) $\dfrac{\pi}{\text{۲}\sqrt{\text{۱}-\text{گ}^{\text{۲}}}}$ (۷) $\tfrac{1}{4}$ لوک ۳

۴۳ـ (۱) $\dfrac{\pi}{2}$ (۲) $-\dfrac{\pi}{2}$ ۴۵ـ $\dfrac{\text{۸ر}^{\text{۲}}}{\text{۵}}$

۴۶ـ ہر ایک $= \dfrac{\text{۲ر}^{\text{۲}}}{\text{۳}}$ ۴۷ـ $\tfrac{1}{2}(\text{۲ر}^{\text{۲}}+\text{ب}^{\text{۲}})\,\pi$

مشق ۳، صفحہ ۳۸

۱ـ $-(\text{لا}+\text{۱})\,\text{قو}^{-\text{لا}}$ ۲ـ $-(\text{لا}^{\text{۳}}+\text{۳لا}^{\text{۲}}+\text{۶لا}+\text{۶})\,\text{قو}^{-\text{لا}}$

۳ـ $\text{جب لا}-\text{لا جم لا}$ ۴ـ $\text{لا جب لا}+\text{جم لا}$

۵ـ $-\tfrac{1}{4}\,\text{لا جم ۲لا}+\tfrac{1}{8}\,\text{جب ۲لا}$ ۶ـ $-\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{جم لا}+\text{۲لا جب لا}+\text{۲ جم لا}$

۷ـ $\dfrac{\text{لا}^{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ن}+\text{۱}}\,\text{لوک لا}-\dfrac{\text{لا}^{\text{ن}+\text{۱}}}{(\text{ن}+\text{۱})^{\text{۲}}}$ ۸ـ $\tfrac{1}{2}(\text{لوک لا})^{\text{۲}}$

۹ـ $-\tfrac{1}{2}\,\text{قو}^{-\text{لا}}+\tfrac{1}{10}\,\text{قو}^{-\text{لا}}(\text{جم ۲لا}-\text{۲ جب ۲لا})$

۱۰ـ $\dfrac{\text{قو}^{\text{لا}}}{\text{۱}+\text{لا}}$ ۱۱ـ $-\tfrac{1}{2}\,\text{قو}^{-\text{لا}^{\text{۲}}}$ ۱۲ـ $\text{لا جب}^{-\text{۱}}\text{لا}+\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}$

۱۳ـ $\text{لا مس}^{-\text{۱}}\text{لا}-\tfrac{1}{2}\,\text{لوک}\,(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})$

۱۴ـ $\tfrac{1}{2}\,\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{جب}^{-\text{۱}}\text{لا}-\tfrac{1}{4}\,\text{جب}^{-\text{۱}}\text{لا}+\tfrac{1}{4}\,\text{لا}\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}$

۱۵- ۱/۲ (۱ + لا^۲) سس^-۱ لا - ۱/۲ لا

۱۶- ۱/۲ (لا - ۱) √(۳ + ۲ لا - لا^۲) + ۲ جب^-۱ (لا - ۱)/۲

۱۷- ۱/۲ (لا + ۱) √(لا^۲ + ۲ لا + ۳) + لوک (لا + ۱ + √(لا^۲ + ۲ لا + ۳))

۱۸- ۱/۲ (لا - ا) √(۲ ا لا - لا^۲) + ۱/۲ ا^۲ جب^-۱ (لا - ا)/ا

۱۹- ۱/۲ (لا + ا) √(۲ ا لا + لا^۲) - ۱/۲ ا^۲ لوک (لا + ا + √(۲ ا لا + لا^۲))

۲۰- ۱/۲ جب^-۱ لا - ۱/۲ لا √(۱ - لا^۲)   ۲۱- لا جب لا / (۱ + جم لا)

۲۲- و^-۳لا / ۲۵ (۴ جب ۴ لا - ۳ جم ۴ لا)

۲۳- ۱/۲ (جمز لا جب لا + جبز لا جم لا)

۲۴- ۱/۲ (جمز لا جب لا - جبز لا جم لا)

۲۵- ۳۵ π/۲۵۶ ، ۵ π/۱۶ ، ۳ π/۲۵۶ ، ۴/۳۵ ، ۷ π/۲۵۶ ، ۱۳/۱۵ - π/۴

۲۶- π ا^۴/۱۶ ، π ا^۳/۲ ، ۵ π ا^۴/۸   ۲۷- (π - ۲) ا^۲/۴

۲۸- ∟م ∟ن / ∟(م + ن + ۱)   ۳۳- ∟م ∟ن / ∟(م + ن)

۳۴- π ا^۶/۳۲ ، ا^۶ (۲۱ π/۳۲ - ۲۸/۱۵)   ۳۶- ۳۲ π/۱۵

۳۷- π ا^۲   ۳۹- ۴ ا (ا - جم (ط/۲))

۴۰- ۱/۲ ا ط √(۱ + ط^۲) + ۱/۲ ا لوک (ط + √(۱ + ط^۲))

۱۴۔ (ر۔ا) قطع س

مشق ۴ صفحہ ۵۱

۱۔ لوک (لا + ۲) − ۱/۲ لوک (۲لا + ۱) − ۱/۳ لوک (۳لا + ۲)

۲۔ ۱۵لا^{2} − ۵ لوک (لا^{2} − ۱) + ۸۰ لوک (لا^{2} − ۴)

۳۔ Σ ا^{2} / ((ا − ب)(ا − ج)) لوک (لا − ا)   ۴۔ − ۱/۲ · ۱/(لا + ۱) + ۱/۴ لوک (لا − ۱)/(لا + ۱)

۵۔ ۱/(۲لا^{2}) + ۱/لا + لوک (لا − ۱)/لا

۶۔ ۱/۱۶ · ۱/(لا + ۱)^{2} − ۱/۱۶ · ۱/(لا − ۱)^{2} + ۳/۱۶ (۱/(لا + ۱) + ۱/(لا − ۱) + لوک (لا − ۱)/(لا + ۱))

۷۔ − ۱/۴ · ۱/(لا^{2} − ۱)^{2} ۸۔ ۲/۳ لوک (لا + ۱) + ۱/۶ لوک (لا^{2} − لا + ۱) + ۱/√۳ مس$^{-1}$ (۲لا − ۱)/√۳

۹۔ ۱/۳ لا^{3} − ۱/۳ مس$^{-1}$ لا^{3}

۱۰۔ لا + لوک (لا^{2} − لا + ۱) + ۲/√۳ مس$^{-1}$ (۲لا − ۱)/√۳

۱۱۔ √۲/۳ مس$^{-1}$ لا/√۲ + ۱/۴ لوک (لا − ۱)/(لا + ۱)

۱۲۔ ۱/(ا^{2} − ب^{2}) (۱/ب مس$^{-1}$ لا/ب − ۱/ا مس$^{-1}$ لا/ا)

۱۳۔ ۱/(۲(ا^{2} − ب^{2})) لوک (لا^{2} + ب^{2})/(لا^{2} + ا^{2})   ۱۴۔ ۱/(ا^{2} − ب^{2}) (ا مس$^{-1}$ لا/ا − ب مس$^{-1}$ لا/ب)

۱۵۔ ۱/۴ لوک (لا − ۱) − ۱/۸ لوک (لا^{2} + ۱) − ۱/۲ مس$^{-1}$ لا + ۱/۴ · (لا − ۱)/(لا^{2} + ۱)

۱۶۔ ۱/(۴√۲) لوک (لا^{2} + √۲لا + ۱)/(لا^{2} − √۲لا + ۱) + ۱/(۲√۲) مس$^{-1}$ (لا√۲ + ۱) + ۱/(۲√۲) مس$^{-1}$ (لا√۲ − ۱)

۱۷- $\frac{5}{16}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+1}{2}+\frac{1}{\text{لا}^2+2\text{لا}+5}-\frac{3}{8}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}^2+2\text{لا}+5}$

۱۸- $-\frac{1}{3\text{ب}\,\text{لا}^3}+\frac{\text{ا}}{2\text{ب}^2\text{لا}^2}-\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^3\text{لا}}+\frac{\text{ا}^3}{\text{ب}^4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}}{\text{لا}}$

۱۹- $\frac{1}{12}\,\text{مس}^{-1}\frac{3\,\text{جب}\,\text{لا}}{4}$ ۲۰- $\frac{1}{12}\,\text{لوک}\,\frac{2+\text{جم}\,\text{لا}}{2-\text{جم}\,\text{لا}}+\frac{1}{6}\,\text{لوک}\,\frac{1-\text{جم}\,\text{لا}}{1+\text{جم}\,\text{لا}}$

۲۱- $-\frac{1}{8}\,\frac{\text{لا}+4}{(\text{لا}^2+4\text{لا}+6)^2}-\frac{3}{32}\,\frac{\text{لا}+2}{\text{لا}^2+4\text{لا}+6}-\frac{3\sqrt{2}}{64}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}+2}{\sqrt{2}}$

۲۲- $\frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2-\text{ا}\,\text{لا}+\text{ا}^2}{\text{لا}^2+\text{ا}\,\text{لا}+\text{ا}^2}$

۲۳- $\frac{1}{25}\,\text{لوک}\,(\text{لا}+1)+\frac{1}{150}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+4)-\frac{2}{75}\,\text{لوک}\,(4\text{لا}^2+1)$

$+\frac{8}{75}\,\text{مس}^{-1}2\text{لا}-\frac{1}{150}\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{2}\text{لا}$

۲۴- $-\frac{1}{\text{لا}}-\frac{1}{2}\,\frac{\text{لا}}{1+\text{لا}^2}-\frac{3}{2}\,\text{مس}^{-1}\text{لا}$

۲۵- $\frac{1}{(\text{ا}-\text{ب})^{\text{م}+\text{ن}-1}}\int\left(1-\frac{1}{\text{ع}}\right)^{\text{م}+\text{ن}-2}\text{دع}$

۲۶- $2\sqrt{\text{لا}}-2\,\text{مس}^{-1}\sqrt{\text{لا}}$ ۲۷- $2\text{لا}^{\frac{1}{2}}-3\text{لا}^{\frac{1}{3}}+6\text{لا}^{\frac{1}{6}}-6\,\text{لوک}\,(1+\text{لا}^{\frac{1}{6}})$

۲۸- $2\sqrt{\text{لا}-1}\left\{\text{لا}+\frac{2}{5}(\text{لا}-1)^2+\frac{1}{7}(\text{لا}-1)^3\right\}$

۲۹- $\frac{2}{\text{ب}^2}\,\frac{2\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}}}$ ۳۰- $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}\sqrt{2}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$

۳۱- $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}\sqrt{2}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{\text{لا}^2+1}+\text{لا}\sqrt{2}}{\sqrt{\text{لا}^2+1}-\text{لا}\sqrt{2}}$

۳۲- $\frac{\text{لا}^{2}}{2\text{ا}} - \frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{2}-\text{ا}}}{2\text{ا}} + \frac{1}{2}\,\text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{2}-\text{ا}}\right)$

۳۳- $\frac{1}{\text{ب}^{2}}\sqrt{\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^{2}}\left\{\frac{1}{5}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^{2})^{2}-\frac{1}{3}\text{ا}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^{2})\right\}$

۳۴- $\frac{4}{25}\left(1+\text{لا}^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{15}\left(1+\text{لا}^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$

۳۵- $\frac{(2\text{لا}^{2}-1)\sqrt{1+\text{لا}^{2}}}{3\text{لا}^{3}}$ ۳۶- $\frac{-(\text{ا}-\text{لا})^{\frac{3}{2}}}{(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}}$

۳۷- $\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{لوک}\frac{1+\text{سن لا}-\sqrt{2\,\text{سن لا}}}{1+\text{سن لا}+\sqrt{2\,\text{سن لا}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{سن}^{-1}\left(\sqrt{2\,\text{سن لا}}-1\right)$

$+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{سن}^{-1}\left(\sqrt{2\,\text{سن لا}}+1\right)$

باب دوم

مشق ۵، صفحہ ۶۶

۱- $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}$ ۲- $\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}$ ۳- π

۴- $\frac{3\pi}{16\,\text{ا}^{5}}$ ۵- $\frac{5\pi\,\text{ا}^{3}}{16}$ ۶- $\pi\,\text{ا}$

۷- π ۸- $\frac{\pi(\text{ب}-\text{ا})^{2}}{8}$ ۹- $\frac{\pi}{\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{ب}^{2}}}$

۱۰- $\frac{\pi}{2\,\text{ا}\,\text{ب}}$ ۱۱- $\frac{\pi(\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2})}{4\,\text{ا}^{3}\,\text{ب}^{3}}$

۱۲- $(\text{ز} - \text{سن}^{-۱}\text{ز})/\text{ز}^{۳}$ ۱۳- $\frac{۱}{۲\text{ز}^{۲}}\sqrt{۱+\text{ز}^{۲}} - \frac{۱}{۲\text{ز}^{۲}}\text{لوک}\left(\text{ز}+\sqrt{۱+\text{ز}^{۲}}\right)$

۱۴- صفر ۱۵- ۱۰ ۱۶- $-\frac{۱}{۹}$

۱۸- $\overline{\text{ن}}$ ۱۹- $\frac{\pi^{۲}}{۴}$ ۲۰- $\frac{۲\pi}{\sqrt{۱-\text{ز}^{۲}}}\,\text{سن}^{-۱}\sqrt{\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}}$

مشق ۶ صفحہ ۷۶

۱- $۲\pi\,\text{ا}\,\text{ھ}^{۲}$ ، $\frac{۸\pi}{۳}\sqrt{\text{ا}}\left[(\text{ا}+\text{ھ})^{\frac{۳}{۲}} - \text{ا}^{\frac{۳}{۲}}\right]$

۲- $\pi\,\text{ھ}^{۲}\sqrt{\text{ب}\,\text{ج}}$ ۳- $\frac{۴}{۳}\,\text{ا}\,\text{ب}^{۲}$ ، $\frac{۴}{۱۵}\pi\,\text{ا}\,\text{ب}^{۲}$

۴- $\frac{\pi(\text{ب}-\text{ا})^{۲}(\text{ب}+\text{ا})}{۸\,\text{ج}}$ ۵- $\frac{\pi(\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲})}{۲}$

۷- $\frac{\text{ا}\,\text{ب}}{۳۰}$ ۹- $\frac{(\pi-۴)\text{ا}^{۲}}{۲}$ ، $\frac{(\pi+۴)\text{ا}^{۲}}{۲}$

۱۰- $۳\pi\,\text{ا}^{۲}$ ، $۲\pi^{۲}\text{ا}^{۳}$ ۱۱- $\pi\,\text{ا}^{۲}$ ، $\frac{\pi^{۲}\text{ا}^{۳}}{۲}$

۱۲- $\frac{(۲-\pi)\text{ا}^{۲}}{۲}$ ۱۳- $\frac{\pi\,\text{ا}^{۳}(۳\pi-۱۰)}{۶}$ ۱۶- ۲

۱۸- $۳\pi\,\text{ا}^{۲}$ ، $۸\,\text{ا}\left(۱-\text{جم}\frac{\text{ع}}{۲}\right)$ ، $۵\pi^{۲}\text{ا}^{۳}$ ، $\pi^{۲}\text{ا}^{۳}$

۱۹- $\frac{\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}}{۶}$ ۲۰- $\frac{\pi\,\text{ا}\,\text{ج}^{۲}}{۲}$

۲۲- $\frac{\text{ل}^{۲}}{۴}\left(\text{سن}\frac{\text{ع}}{۲} + \frac{۱}{۳}\text{سن}^{۳}\frac{\text{ع}}{۲}\right)$ ،

$\frac{\text{ل}^{۲}\,\text{ز}}{۲(۱-\text{ز}^{۲})}\left\{۱-\frac{\text{جب عا}}{۱+\text{ز جم عا}}+\frac{۲}{\text{ز}\sqrt{۱-\text{ز}^{۲}}}\,\text{مس}^{-۱}\left(\sqrt{\frac{۱-\text{ز}}{۱+\text{ز}}}\,\text{مس}\frac{\text{عا}}{۲}\right)\right\}$

۲۳- $\frac{\pi\,\text{ر}^{۲}}{۱۲}$ ۲۴- $\frac{\pi\,\text{ر}^{۲}}{۴}$ ، $\frac{\pi\,\text{ر}^{۲}}{۲}$

۲۵- $(۳-۲\,\text{لوک}\,۲)\frac{\text{ر}^{۲}}{۴}$ ۲۶- $\frac{(۴-\pi)\,\text{ر}^{۲}}{۲}$

مشق ۷ صفحہ ۹۰

۳- $\frac{۱۶\,\text{ر}^{۲}}{۳}$ ۶- ۱۱π ۹- $\frac{\pi}{۲\,\text{م}\,\text{ن}}\left(\frac{\text{ر}^{۲}}{\text{م}^{۲}}+\frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ن}^{۲}}\right)$

باب سوم

مشق ۹ صفحہ ۱۳۰

۱- (۱) $(\text{ر}_{۱}^{۲}+\text{ر}_{۲}^{۲}+\text{ر}_{۳}^{۲}+\dots+\text{ر}_{\text{ن}}^{۲})/۲$

(۲) $(\text{ب}_{۱}^{۲}+\text{ب}_{۲}^{۲}+\text{ب}_{۳}^{۲}+\dots+\text{ب}_{\text{ن}}^{۲})/۲$

۲- $(\text{ر}_{۱}\,\text{ا}_{۱}+\text{ب}_{۱}\,\text{ح}\,\text{ب}_{۱}+\text{ر}_{۲}\,\text{ا}_{۲}+\text{ب}_{۲}\,\text{ح}\,\text{ب}_{۲})/۲$

۷- (۱) $\frac{۳\,\text{ھ}}{۵}$ ، $\frac{۳\,\text{ک}}{۸}$ (۲) $\frac{۲\,\text{ھ}}{۵}$ ، $\frac{\text{ک}}{۲}$

(۳) $\frac{۲}{۳}\,\text{ا}\,\text{جب}^{۳}\,\text{عا}/(\text{عا}-\text{جب عا جم عا})$ ،

(۴) $\bar{\text{لا}}=\frac{۳}{۸}\,\text{ا}(۱+\text{جم عا})$ (۵) $\frac{۵\,\text{ا}}{۹}$ ،

۱۰- (۱) $\frac{۵\,\text{م}\,\text{ر}^{۲}}{۴}$ (۲) $\frac{۷\,\text{م}\,\text{ر}^{۲}}{۵}$ (۳) $\frac{\text{م}\,\text{ف}^{۲}}{۶}$

(۴) $\frac{۳ مر^۲}{۱۰}$ ، $\frac{۳ مر (ر^۲ + ۴ ف^۲)}{۲۰}$

باب ہفتم

مشق ۱۴، صفحہ ۲۴۴

۶- (ا-ا ع) (ا-ب ع) - ھ^۲ ع^۲ = ۰ ع، ع مخروطی ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ا کے نیم محوروں کے مربعے ہیں۔

۷- $\frac{ل^۲ ا^۲}{ا^۲ - ع} + \frac{م^۲ ب^۲}{ب^۲ - ع} + \frac{ن^۲ ج^۲}{ج^۲ - ع} = ۰$ ع، ع اس مخروطی کے نیم محوروں کے مربعے ہیں جہاں سطح مستوی ناقص نما کو قطع کرتی ہے۔

مشق ۱۵، صفحہ ۲۵۴

۱- $\frac{۱}{۲}$ ن (ن + ۱) ۲- $\frac{۱}{۲ ا}$ ۳- ا

۴- (ا~۱~ + ا~۲~ + ... + ا~ن~)/ن ۵- ∞ اور ۱

۶- ۱- اور ۱- ۷- ۲ اور ۲ ۸- ۱ اور ۱-

۹- $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{۲ ا}{ب}$ ۱۰- $\frac{۱}{۲}$

۱۱- $\frac{لوک ا - لوک ب}{لوک ج - لوک گ}$ ۱۲- ۱ اور ۱

۱۳- ا~۱~ ا~۲~ ..... ا~ن~ ۱۴- $\frac{۱}{۳}$ اور ۱

۱۵- و $\frac{۳}{۲ ب^۲}$ اور صفر ۱۶- ± $(\frac{ا}{ب})$

باب ہشتم

مشق ۱۷، صفحہ ۲۸۴

۱- ما - لا = مر(۱ + لا ما) جہاں مر مستقل ہے۔

۲- جب^-۱ ما - جب^-۱ لا = مر   ۳- مر ما = (۱ - مر ما)(لا + مر)

۴- لا ما^۲ = مر(۲ما + لا)   ۵- ما = مر لا^۲ - ۱/(۴مر)

۶- (۲لا - ۳ما + ۱)^۲ (لا + ۲ما - ۲) = مر

۷- لا = مر + ∫ (عا + ج)/ر دعا جہاں ر = (ا + م ب)عا + اج + ب گ

۸- ب ما^۲ + ۲ا لا ما - ف لا^۲ - ۲گ لا + ۲ج ما = مر

۹- ما = (لا + مر) قو^لا   ۱۰- ما = ۱/۲ لا + مر/لا

۱۱- ما = (جب^-۱ لا + مر)/√(۱ - لا^۲)   ۱۲- (۱ + لا^۲) ما = ۱/۳ لا^۳ + مر

۱۳- ما = مر قو^{ا لا} + {ا جم(ب لا + ج) + ب جب(ب لا + ج)}/(ا^۲ + ب^۲)

۱۴- ۱/ما^۵ = ۵/۲ لا^۳ + مر لا^۵   ۱۵- لا/ما = مر + لو لا

۱۶- لا^۴ + ۲لا^۲ ما^۲ - ما^۴ - ۲ا^۲ لا^۲ - ۲ب^۲ ما^۲ = مر

۱۷- (ما - مر لا)^۲ = ا^۲ مر^۲ + ب^۲، لا^۲/ا^۲ + ما^۲/ب^۲ = ۱

۱۸- ما = مر لا + مر^۳، ۲۷ما^۲ + ۴لا^۳ = ۰   ۱۹- ما^۲ = مر لا^۲ + مر^۲

۲۰- ما = ا وٓ^لا + ب و^-لا ۲۱- ما = ا + ب و^۲لا + ج و^۳لا

۲۲- ما = و^۳لا (ا جم لا + ب جب لا) + (۲ جم ۲لا + جب ۲لا)/۳۰

۲۳- ما = ا و^لا + ب و^۲لا - لا و^لا

۲۴- ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا + لا (ا جب ن لا - ب جم ن لا)/۲ن

۲۵- ما = ا و^ن لا + ب و^-ن لا + لا (ا و^ن لا - ب و^-ن لا)/۲ن

۲۶- ما = و^۳لا (ا جم ۲لا + ب جب ۲لا) + (۹۹ لا^۲ + ۱۵۶ لا + ۴۶)/۲۱۹۷

۲۷- ما = (ا + ب لا) جم لا + (ع + ف لا) جب لا

۲۸- لا = و^۶ت (ا جم ت + ب جب ت)

ما = و^۶ت {(ا - ب) جم ت + (ا + ب) جب ت}

۲۹- لا = ا جم ت + ب جب ت، ما = ۱/۲ (ب - ۳ا) جم ت - ۱/۲ (ا + ۳ب) جب ت

۳۰- لا = ا و^ت + ب و^-۵ت - ۲/۵ ت - ۱۳/۲۵ + ۳/۷ و^۲ت

ما = ا و^ت + ب و^-۵ت - ۳/۵ ت - ۱۲/۲۵ + ۲/۷ و^۲ت

۳۱- لا = (ا + ب ت) و^ت + (ع + ف ت) و^-ت

ما = ۱/۲ (ب - ا - ب ت) و^ت - ۱/۲ (ع + ف + ف ت) و^-ت

۳۲- لا = و ت جم عہ، ما = و ت جب عہ - ۱/۲ ج ت^۲

۳۳- لا = ا جم ن ت، ما = ب جب ن ت جہاں ن = √مہ

۳۴- د لا / د ت = -√۲مہ √(۱/لا - ۱/ر)، ت = √(ر^۳/۲مہ) (طہ + جب طہ جم طہ) جہاں لا = ر جم^۲ طہ

۳۵- (۱) ب ما = $\frac{۱}{۲۴}$ و (لا^۴ - ۲ ل لا^۳ + ل^۳ لا)

(۲) ب ما = $\frac{۱}{۲۴}$ و لا^۲ (ل - لا)^۲

(۳) ب ما = $\frac{۱}{۲۴}$ و لا^۲ (لا^۲ - ۴ ل لا + ۶ ل^۲)

۳۶- ما = (ا جم ن لا + کب جب ن لا) / لا ؛ ما = ب (جب ن لا) / لا

۳۹- (۱) ما = ا + $\frac{ب}{لا}$ + لا^۲ (۲) ما = ا لا^۲ + ب لا^۲ + ج لا - لا^۲ لوک لا

(۳) ما = ا لا^۲ + $\frac{ب}{لا}$ - $\frac{۱}{۲}$ لا

۴۰- ما = ا جم (ن لوک لا) + کب جب (ن لوک لا)

۴۱- ما = ار + $\frac{ب}{ر}$ ۴۲- و = ا لوک ر + کب

۴۳- (عف ما)^۲ + ۱ = ۴ ا^۲ / (م - ما^۲)^۲

۴۵- ما = $\frac{۱}{۸}$ لا^۳ + ا لا + $\frac{ب}{لا}$

باب نہم

مشق ۱۸ صفحہ ۳۰۹

۳- (۱) لا > ۱ ، ما = $\frac{\pi}{۲}$ ؛ ۰ > لا > ۱ ، ما = $\frac{\pi لا}{۲}$ ؛ - ۱ > لا > ۰ ، ما = $\frac{\pi لا}{۲}$

لا > - ۱ ، ما = - $\frac{\pi}{۲}$

(۲) لا > ۲ ، ما = $\frac{\pi}{۲}$ ؛ ۰ > لا > ۲ ، ما = π (۴ لا - لا^۲) / ۸

۲۰ > لا > ۰ ، ما = π (۴ لا + لا^۲) / ۸ ؛ لا > - ۲ ، ما = - $\frac{\pi}{۲}$

۲۰۔ لا > ۲ل، ما = ۳π/۲ ؛ ۰ < لا < ۲ل، ما = π/۲ ؛
−۲ل < لا < ۰، ما = −π/۲ ؛ لا < −۲ل، ما = −۳π/۲

باب دہم

مشق ۲۰ صفحہ ۳۸۱

۱۔ ۴/π (جب لا/۱ + جب ۳لا/۳ + جب ۵لا/۵ + ...)

۲۔ ۴ج/π (جب πلا/ل + ۱/۳ جب ۳πلا/ل + ۱/۵ جب ۵πلا/ل + ...)

۳۔ ۳π/۸ + ۲/π (جم لا/۱² − جم ۲لا/۲² + جم ۳لا/۳² − ......)
− ۲/π (جم ۲لا/۲² − جم ۴لا/۴² + جم ۶لا/۶² − ......)

۴۔ ۳ل/۸ + ۲ل/π² (۱/۱² جم πلا/ل − ۱/۲² جم ۲πلا/ل + ۱/۳² جم ۳πلا/ل − ....)
− ۲ل/π² (۱/۲² جم ۲πلا/ل − ۱/۴² جم ۴πلا/ل + ۱/۶² جم ۶πلا/ل − ....)

۵۔ ۳ل/۲ − ۴ل/π² (جم πلا/ل + ۱/۳² جم ۳πلا/ل + ۱/۵² جم ۵πلا/ل + ...)

۶۔ ل ج/۴ − ۲ل ج/π² (جم πلا/ل + ۱/۳² جم ۳πلا/ل + ۱/۵² جم ۵πلا/ل + ...)
+ ل ج/π (جب πلا/ل − ۱/۲ جب ۲πلا/ل + ۱/۳ جب ۳πلا/ل − ....)

۷۔ $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\text{جم}\,2\text{لا}}{1\times3} + \frac{\text{جم}\,4\text{لا}}{3\times5} + \frac{\text{جم}\,6\text{لا}}{5\times7} + \cdots\cdots\right)$

۸۔ $\frac{ل^2}{12} + \frac{2ل^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\text{جم}\frac{2\pi\text{لا}}{ل} - \frac{1}{4^2}\text{جم}\frac{4\pi\text{لا}}{ل} + \frac{1}{6^2}\text{جم}\frac{6\pi\text{لا}}{ل} - \cdots\right)$

$+ \frac{2ل^2}{\pi^3}\left(\text{جم}\frac{\pi\text{لا}}{ل} - \frac{1}{3^3}\text{جم}\frac{3\pi\text{لا}}{ل} + \frac{1}{5^3}\text{جم}\frac{5\pi\text{لا}}{ل} - \cdots\cdots\right)$

۹۔ $1 + \frac{1}{2}\text{جم}\,\text{لا} - 2\left(\frac{\text{جم}\,2\text{لا}}{1\times3} + \frac{\text{جم}\,3\text{لا}}{2\times4} + \frac{\text{جم}\,4\text{لا}}{3\times5} + \cdots\cdots\right)$

۱۰۔ $\frac{2ب\,ج^2}{\pi^2 ل(ج-ل)}\left\{\text{جب}\frac{\pi ل}{ج}\,\text{جب}\frac{\pi\text{لا}}{ج} + \frac{1}{2^2}\text{جب}\frac{2\pi ل}{ج}\,\text{جب}\frac{2\pi\text{لا}}{ج} + \cdots\right)$

۱۲۔ (۱) $\frac{ق^{ل\pi}-1}{\pi ل} + \frac{2ل}{\pi}\sum_{ن=1}^{\infty}\frac{ق^{ل\pi}\,\text{جم}\,ن\pi - 1}{ل^2+ن^2}\,\text{جم}\,ن\,\text{لا}$

(۲) $\frac{2}{\pi}\sum_{ن=1}^{\infty}\frac{ن}{ل^2+ن^2}\left(1 - ق^{ل\pi}\,\text{جم}\,ن\pi\right)\text{جب}\,ن\,\text{لا}$

۱۳۔ اگر سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہو جبکہ لا وقفہ (۰، لہ) کے اندر ہو تو یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ ہر لا کے لئے یہ یکساں طور پر مستدق ہے اور ایک جفت دوری تفاعل مثلاً فہ (لا) کو تعبیر کرتا ہے جس کا دور ۲ لہ ہے۔ فہ (لا) کو وقفہ (۰، لہ) کے درمیان جیب التمام سلسلہ میں پھیلاؤ۔ سر معلوم کرنے کے لئے ہم رقم برقم تکمیل کر سکتے ہیں۔ جیب التمام سلسلہ فہ (لا) کو ہر لا کے لئے تعبیر کرتا ہے۔

تمت

فہرستِ اصطلاحات

تکملی احصا (گبن) حصۂ دوم

Abscissa	فصلہ
Absolute convergence	مطلق استدقاق
Adiabatic	حرناگذار
Amplitude	حیطہ، سعت
Anchor ring	لنگر چھلا
Approximation	تقرب
Arbitrary constant	اختیاری مستقل
Argument	وجہ (دلیل)
Asymptote	متقارب
Battery	مورچہ
Bending of beams	شہتیروں کا جھکاؤ
Bessel's function	بیسل کا تفاعل
Calculus	احصا
Calculus of variations	احصاء تغیرات

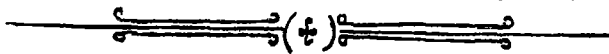
Canonical form	صورت آئینی
Cardioid	خط صنوبری
Catenary	زنجیرہ
Circuit	حلقہ، دورہ
Clairaut's form	کلیروی صورت
Closed curves	بند منحنی
Commutative Law	قانون تبدیلی (مبادلہ)
Complementary function	متمم تفاعل
Complete integral (differential)	پورا تکملہ (تفرقہ)
Complete primitive	کامل ابتدائی
Concavity	تقعر، گہراؤ
Conditionally convergent	شرطاً مستدق
Conocuneus	مخروط فانہ
Conservative system of forces	قوتوں کا نظام بقائی
Continuity	تسلسل
Convergent	مستدق
Convexity	تحدب، ابھار
Coordinate	محدد
Current coordinates	رواں محدد
Curvature	انحنا
Curve tracing	منحنیات کی ترسیم
Cusp	قرن
Cycloid	خط تدویر
Deflection	انصراف
Definite integral	محدود تکملہ

Degree	درجہ
Derivative	مشتق
Differential	تفرقہ، تفرقی
Differential Calculus (equations)	تفرقی احصا (مساواتیں)
Differentiate	تفرق کرنا
Differentiation	تفرق
Dirichlet's Integral	دُرشلے کا تکملہ
Discontinuity	عدم تسلسل
Discontinuous	غیر مسلسل
Discriminant	ممیز
Distributive law	قانون تقسیمی
Double Integral	دوہرا تکملہ
Eccentric anomaly	خروج المرکز بے قاعدگی
Eccentricity	خروج المرکز
Electromotive force	قوت محرکۂ برق
Electron	برقیہ
Eliminant	حاصل اسقاط
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Empirical function	امتحانی تفاعل
Entropy	ناکارگی
Envelope	لفاف
Epicycloid	برتدویر
Equiangular spiral	مساوی الزاویہ لولبی
Equilateral Hyperbola	قائم قطع زائد (قائم زائد)

Exact Equation	ٹھیک، حاضر یا تیار مساوات
Evolute	برکسیہ
Explicit (function)	تصریحی (تفاعل)
Flexural rigidity	خمیدگی کی استواری
Fourier's series	فوریر یا فورسے کا سلسلہ
Fluxion	روانی
Flux (fluent)	بہاؤ (بہنے والا)
Folium of Decartes	کارٹیزی پتا
Gamma function	گاما تفاعل
Generalised integral	تعمیمی تکملہ
Gradient	ڈھال
Gyroscope	گردش نما
Gyrostatic Pendulum	گردشی رقاص
Harmonic curve	موسیقی منحنی
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic substitution	زائدی ابدال
Hypocycloid	درتدویر
Impendance	مقاومت
Indefinite integral	نا محدود تکملہ
Indeterminate forms	غیر معین صورتیں
Inductance	امالیت
Inertia	جمود
Infinite limits	لامتناہی حدود
Infinite series	لامتناہی سلسلے
Infinite simal	صغاری (صغاریات)

Inflexion	انعطاف
Integral	تکملہ، تکملی
Integral Calculus	تکملی احصا
Integrand	متکمل
Integrate	تکمل کرنا
Integration	تکمل
Integrating factor	تکملی جزو ضربی
Integration by parts	تکمل بالحصص
Integraph	تکملی مرسام
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Involute	درپیچ
Irrational function	غیر منطق تفاعل
Irreversible (process)	غیر انقلاب پذیر (عمل)
Lemniscate	اشتیرن کی شکل کا منحنی
Linear Equations	خطی مساواتیں
Lituus	عصا کی شکل کا منحنی
Loop	حلقہ
Lower Limit	نچلی حد
Maclaurin's theorem	مکلارن کا مسئلہ
Mean value Theorem	اوسط قیمت کا مسئلہ
Moment of Inertia	جمود کا معیار
Monotonic	یکرنگ
Non Convergent	غیر مستدق
Node	عقدہ
Octant	ثمن

Operator	عامل
Order	رتبہ
Ordinary (differential equations)	معمولی (تفرقی مساواتیں)
Ordinate	معین
Parabola	قطع مکافی
Paraboloid	مکافی نما
Parallel curves	متوازی منحنی
Parameter	متبدل
Partial (differentiation, differential equations)	جزوی (تفرق، تفرقی مساواتیں)
Partial fractions	جزوی کسور
Particular integral	خاص تکملہ
Pedal curve	پائین منحنی
Planimeter	سطح پیما
Potential	قوہ
Power Series	قوتی سلسلے
Primitive	ابتدائی
Prolate spheroid	لمبوترا کرہ نما
Quadratic function	دو درجی تفاعل
Range of integration	تکمل کی وسعت یا سعت
Rate	شرح
Rectification	تخطیط
Raduction formulæ	تحویلی ضابطے
Remainder	باقی
Repulsion	دفع

Rigid dynamics	استواری حرکیات
Self inductance	ذاتی امالیت
Semicubical Parabola	نیم کعبی مکافی
Simultaneous equations	ہمزاد مساواتیں
Singular solution	نادر حل
Space rate	مکانی شرح
Spiral	لولب، لولبی
Standard forms	معیاری صورتیں
Stationary value	قائم قیمت
Steps of a (moving point)	قدم (متحرک نقطہ کے)
Successive (diffentiation	متواتر (تفرق
reduction	تحویل)
Taylor's Theorem	ٹیلر کا مسئلہ
Time rate	زمانی شرح
Total derivative	پورا مشتق
Transcendental	ماورائی
Triple Integral	تہرا تکملہ
Turning (point, value)	موڑ پر (کا نقطہ، کی قیمت)
Upper limit	اوپر کی حد
Uniform convergence	یکساں استدقاق
Unlimited (integral, interval)	بلا حد (تکملہ، وقفہ)

[ترقیم جو اس کتاب میں استعمال کی گئی ہے]

ا، ب، ج، د	$A, B, C, D,$
ا، ب، ج، د	$a, b, c, d,$
لا، ما، ہی	x, y, z
لا، ما، ے	$X\ Y\ Z$
عہ، بہ، جہ	α, β, γ
ل، م، ن	l, m, n
طہ، فہ، سا	θ, ϕ, ψ
ضا، غا، ظا	ξ, η, ζ
لہ، مہ، نہ	λ, μ, ν
ف(لا)	$f(x)$
فا(لا)	$F(x)$
فہ(لا)	$\phi(x)$
جب لا	$\sin x$
جم لا	$\cos x$
مس لا	$\tan x$
مم لا	$\cot x$
قط لا	$\sec x$
قم لا	$\operatorname{cosec} x$
جب$^{-1}$ لا، جم$^{-1}$ لا، مس$^{-1}$ لا	$\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x,$
مم$^{-1}$ لا، قط$^{-1}$ لا، قم$^{-1}$ لا	$\cot^{-1}x, \sec^{-1}x, \operatorname{cosec}^{-1}x,$

Sine hyperbolic (Sinh x)	زائدی جیب (جیز لا)
Sinh x, Cosh x, Tanh x	جیز لا، جمز لا، مسز لا
Coth x, Sech x, Cosech x	ممز لا، قطز لا، قمز لا
Sinh ^{-1}x, Cosh ^{-1}x, Tanh ^{-1}x	جیز$^{-1}$لا، جمز$^{-1}$لا، مسز$^{-1}$لا
Coth ^{-1}x, Sech ^{-1}x, Cosech ^{-1}x	ممز$^{-1}$لا، قطز$^{-1}$لا، قمز$^{-1}$لا
$\cdot 123\dot{5}\dot{7}$	؍۱۲۳۵۷
π	π
Exponent (e)	قوت نما (قو) یا صرف (قو)
e^{x}	قو^{لا}
a^{x}	ا^{لا}
$\log_e x$	لوگ$_و$ لا [یا صرف لوگ لا]
$\log_{10} x$	لوگ$_{۱۰}$ لا
ϵ	سہ یا صہ
∞	∞
Limit, Lt	انتہا، نہا
Lt $f(x)=A$	نہا ف(لا) = ا
S_{n+1}	س$_{ن+۱}$
S	س
time (t)	وقت (ت)
arc (s)	قوس (س)
differential (d)	فرقی (فر)

differential coefficient $\left(\frac{dy}{dx}\right)$	تفرقی سر (فرما / فرلا)
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$	فرما/فرلا ، فر۲ما/فرلا۲ ..... فرنما/فرلان
Partial differential Coefficient $\frac{\partial}{\partial x}$	جزوی تفرقی سر جف/جفلا
$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ldots$	جفما/جفلا ، جف۲ما/جفلا۲ ، جف۲ی/جفلاجفما
$\delta x, \delta y, \delta z$	مف لا ، مف ما ، مف ی
dx , dy , lz	فرلا ، فرما ، فری
$f'(x), f''(x)$	فَ (لا) ، فً (لا) ....
Operator (D)	عامل تفرق (عف)
Dy, D^2y	عف ما ، عف۲ ما ....
$\nabla^2 u$	لف۲ و
Summation$(S, \int)$	مجموعہ (م ، ∫)
$\int_a^b F(x)\, dx$	∫ د ب فا(لا) فرلا
$\iint f(x,y)\, dx\, dy$	∫∫ ف(لا، ما) فرلا فرما
$\left[D^{-1}F(x)\right]_a^b$	[عف۱ فا(لا)] د ب
$\int_0^\infty f(x)\, dx$	∫ ۰ ∞ ف(لا) فرلا
Gamma Function $\Gamma(n)$	گاما تفاعل جا(ن)
(Beta Function) $B(m, n)$	بیٹا تفاعل با(م، ن)

Bessel function $J_r(x)$	بیسل کا تفاعل سجر(لا)
Sum Σ	حاصل جمع جَ جر یا ∑
$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{Cos} n x$	∑ ان جم ن لا

Velocities u, v, w	رفتاریں ع، و، ھ
Kinetic energy E	توانائی بالحرکت حا
Work K	کام، ک
Potential V	قوہ، ق
Pressure P	دباؤ، د
Volume V	حجم، ح